Lahtine võistlus 2014 sügis

Matemaatika lahtine võistlus

4. oktoober 2014 **Noorem rühm**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia vähim selline naturaalarv n, et arvudes $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$ ja $n+6$ kokku on igat numbrit 0-st 9-ni kasutatud vähemalt ühe korra.

2. Kooli aulas on 10 rida toole. Lühimas reas on 20 tooli ning kaht sama toolide arvuga rida saalis ei ole. Kui Juku aulasse jõudis, ei olnud tal võimalust istuda nii, et tema kõrval (naabertoolil) keegi teine juba ei istuks. Leia vähim võimalik hõivatud toolide arv hetkel, kui Juku aulasse jõudis.

3. Algul kirjutatakse paberile arv 1. Igal sammul lisatakse viimati kirjutatud arvu alla kas temast täpselt kaks korda suurem arv või mõni viimati kirjutatud arvust numbrite ümberjärjestamisel saadud arv (arvestades, et arvud ei alga nulliga). Kas on võimalik, et lõpliku hulga selliste sammude järel on paberil

a) arv 1000000000?

b) arv 9876543210?

4. Kumb arvudest 2^{2014} ja $3^{303} \cdot 4^{404} \cdot 5^{505}$ on suurem?

5. Teravnurkse kolmnurga ABC ümberringjoone kaar AB peegeldatakse sirgest AB ja kaar AC sirgest AC. Tõesta, et saadud kahel kaarel on lisaks punktile A veel üks lõikepunkt.

6. Kehalise kasvatuse tunnis käsib õpetaja tüdrukutel rivistuda nii, et mitte kellegi poleks mõlemal pool kõrval temast lühemat tüdrukut. Klassis on 13 tüdrukut, iga kaks tüdrukut on erineva pikkusega. Leia erinevate võimaluste arv tüdrukutel õpetaja käsk täita.

Matemaatika lahtine võistlus

4. oktoober 2014 **Vanem rühm**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille korral võrrandil $(x^2+y^2)^n = (xy)^{2014}$ leidub positiivseid täisarvulisi lahendeid.

2. Leia kõik sellised funktsioonid, mis on määratud kõigil reaalarvudel ja annavad reaalarvulisi väärtusi ning rahuldavad mistahes reaalarvude x ja y korral võrdust

$$f(x+y)f(y) = f(x+xf(y)).$$

3. Olgu K, L ja M punktid vastavalt kolmnurga ABC külgedel BC, CA ja AB, mille korral $\frac{|AM|}{|MB|} \cdot \frac{|BK|}{|KC|} \cdot \frac{|CL|}{|LA|} = 1$. Tõesta, et kolmnurkade ALM, BMK ja CKL seas leidub kaks sellist, mille siseringjoonte raadiuste summa on vähemalt niisama suur kui kolmnurga ABC siseringjoone raadius.

4. Ruudustikus on n rida ja m veergu (n ja m on positiivsed täisarvud). Leia kõik naturaalarvude paarid (k, l), mille korral saab ruudustikus osa ruute märgistada nii, et igas reas on täpselt k ruutu märgistatud ja igas veerus on täpselt l ruutu märgistatud.

5. Maailmakuulsate üleaedsete Jaan Tatika ja Saalomon Vesipruuli kruntide vahelise aia ääres asub hapukurgitünn. Kumbki soovib tünni enda valdusse saada, milleks on võimalikud järgmised operatsioonid.

- Isik võib toast minna aia äärde emmale-kummale poole aeda.
- Isik, kes asub tünniga samal pool aeda, võib tünni oma valdusse haarata (ka siis, kui see on parajasti vastaspoole käes).
- Isik võib üle aia ronida (kui tünn on tema valduses, siis ta liigub koos sellega).
- Isik, kes on oma pool aeda ja valdab tünni, saab selle oma tuppa viia.

Võidab pool, kel õnnestub tünn tuppa viia. Algul on mõlemad isikud oma tubades, operatsioone alustab Tatikas ja neid tehakse kordamööda; kumbki pool võib aga reegleid ülimalt ühe korra rikkuda, tehes kaks operatsiooni järjest. Kas ühel kuulsustest on võimalik võit garanteerida, kui hapukurgitünn asub algselt

a) Tatika pool aeda?

b) Vesipruuli pool aeda?

Открытое соревнование по математике

4 октября 2014 г. **Младшая группа**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти такое наименьшее натуральное число n, при котором каждая из цифр от 0 до 9 присутствовала бы в записи хотя бы одного из шести последовательных чисел $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$ и $n+6$.

2. В актовом зале школы всего 10 рядов стульев. В самом коротком ряду всего 20 стульев, и в зале нет двух рядов с одинаковым числом стульев. Когда Юра вошёл в зал, то у него не было возможности сесть на стул так, чтобы рядом с ним (на соседнем стуле) никто другой не сидел. Найти наименьшее возможное число занятых стульев в тот момент, когда Юра вошёл в зал.

3. Сначала на листок бумаги записывают число 1. Каждым шагом под последним записанным числом записывают либо число, которое ровно в два раза больше этого числа, либо число, полученное перестановкой цифр записанного последним числа (учитывая, что числа не могут начинаться с цифры 0). Возможно ли после конечного числа таких шагов записать на этом листке бумаги

а) число 1000000000?

б) число 9876543210?

4. Какое из чисел больше, 2^{2014} или $3^{303} \cdot 4^{404} \cdot 5^{505}$?

5. Дугу AB описанной около остроугольного треугольника ABC окружности зеркально отражают относительно прямой AB, а дугу AC зеркально отражают относительно прямой AC. Доказать, что у полученных двух дуг найдётся кроме точки A ещё одна общая точка.

6. На уроке физкультуры учитель попросил девочек построиться в ряд так, чтобы ни одна девочка не оказалась в этом ряду между двумя девочками, которые меньше её ростом. На этом уроке было только 13 девочек, и любые две из них были различного роста. Найти число различных возможностей для выполнения просьбы учителя.

Открытое соревнование по математике

4 октября 2014 г. **Старшая группа**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все такие положительные целые числа n, при которых уравнение $(x^2 + y^2)^n = (xy)^{2014}$ имеет решение в положительных целых числах.

2. Найти все такие функции, которые определены для всех действительных чисел, принимают действительные значения, и при которых для любой пары действительных чисел x и y соблюдается равенство

$$f(x+y)f(y) = f(x + xf(y)).$$

3. Точки K, L и M лежат соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC так, что имеет место равенство $\frac{|AM|}{|MB|} \cdot \frac{|BK|}{|KC|} \cdot \frac{|CL|}{|LA|} = 1$. Доказать, что среди треугольников ALM, BMK и CKL найдутся два таких, сумма длин радиусов вписанных окружностей которых не меньше длины радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC.

4. Клетчатая доска имеет n рядов и m столбцов (n и m – положительные целые числа). Найти все пары натуральных чисел (k, l), при которых можно часть клеток доски отметить так, чтобы в каждом ряду было ровно k отмеченных клеток, а в каждом столбце ровно l обозначенных клеток.

5. Возле забора, разделяющего участки коротышек Знайки и Незнайки, находится бочка с солёными огурцами. Каждый из них хочет завладеть этой бочкой, для чего возможны следующие операции.

- Коротышка может выйти из своего домика к забору, как с одной, так и с другой его стороны.
- Коротышка, который находится с той же стороны забора, что и бочка, может взять эту бочку себе (даже если она в этот момент находится в руках у другого).
- Коротышка может перелезть через забор (если у него в руках бочка, то перелазит вместе с ней).
- Коротышка, который со своей стороны забора и у которого в руках бочка, может отнести её себе домой.

Выигрывает тот, которому удастся принести бочку себе домой. Вначале каждый коротышка в своём домике, операции начинает Знайка, и их совершают по очереди. Каждая сторона может за всю игру максимально один раз нарушить правила, совершив две операции подряд. Может ли один из коротышек обеспечить себе победу, если бочка с солёными огурцами находится изначально

а) со Знайкиной стороны забора?

б) с Незнайкиной стороны забора?

Matemaatika lahtine võistlus

4. oktoober 2014 **Noorem rühm**

Lahendused

1. *Vastus:* 1234.

On lihtne veenduda, et arvude 1235, 1236, 1237, 1238, 1239 ja 1240 kirjutamisel on kasutatud kõik numbrid 0-st 9-ni.

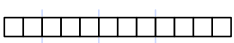
Näitame, et väiksematest järjestikustest arvudest sellist 6-liikmelist järjendit moodustada ei saa. Kui mujal peale üheliste numbrikoha numbrid ei vahetuks, oleks vaja vähemalt viiekohalisi arve (4 kohta peale üheliste) ja need ülaltoodud näitest väiksemad kindlasti ei ole. Eeldame nüüd, et numbrivahetusi toimub ka mujal peale üheliste. Alati, kui mingil kohal X toimub numbrivahetus, toimub kõigil madalamatel numbrikohtadel, kaasa arvatud ühelised, üleminek 9-lt 0-le. Järelikult esineb neil madalamatel kohtadel kokku ainult 6 numbrit. Koos kohaga X oleks kasutatud ülimalt 8 erinevat numbrit, mis tähendab, et 10 numbri kasutamiseks on vaja lisaks 2 numbrikohta, kus numbrid ei muutu ja üheski 6 arvust ei kordu. Sellest tulenevalt on vaja kasutada vähemalt neljakohalisi arve.

Vähim võimalik tuhandeliste number on 1. Sajaliste number ei saa olla 0, sest 0 esineb ka üheliste numbrina, ega ka 1, sest 1 on tuhandeliste number. Seega vähim võimalik sajaliste number on 2. Vähim kümneliste number on sarnasel põhjusel 3 ning otsitav arv 1234.

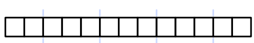
2. *Vastus:* 85.

Et Jukul pole võimalust vältida kellegi kõrvale istumist, saab igas reas olla keskel ülimalt 2 vaba tooli järjest ja otstes ülimalt 1 vaba tool.

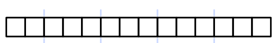
Näitame, et vähim hõivatud toolide arv n tooliga reas on $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$, kus $\lceil x \rceil$ tähistab vähimat täisarvu, mis pole väiksem kui x (st $\lceil x \rceil$ on x „üles ümardatud“ täisarvuks). Selleks jaotame toolid vasakult alustades $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ rühma nii, et esimene rühm koosneb 2 toolist, järgmised rühmad peale viimase koosnevad 3 toolist ning viimases rühmas on niipalju kui üle jääb (joonistel 1, 2 ja 3 on kujutatud kõik võimalused vastavalt arvu n jäägile 3-ga jagamisel). Lahenduse algul väljatoodu põhjal on igas rühmas vähemalt üks



Joonis 1

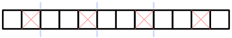


Joonis 2

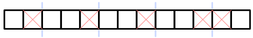


Joonis 3

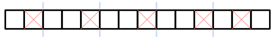
tool hõivatud, mistõttu hõivatud toole on kindlasti vähemalt $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$. Teisest küljest, hõivates igas toolirühmas esimesest eelviimaseni parempoolseima tooli ja viimases rühmas paremalt teise tooli, on kõik vabad toolid mõne hõivatud tooli kõrval (joonised 4, 5 ja 6).



Joonis 4



Joonis 5



Joonis 6

Et lühimas reas on 20 tooli ja kaht ühepikkust rida pole, on vähimad võimalikud toolide arvud ridades lühimast pikimani 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29. Eespool tõestatu põhjal on neis ridades hõivatud vastavalt vähemalt 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10 tooli. Hõivatud toolide koguarv on järelikult vähemalt $7+7+8+8+8+9+9+9+10+10$ ehk 85.

3. *Vastus:* a) jah; b) ei.

a) Tähistagu $\rightarrow$ esimest liiki sammu (2-ga korrutamine) ning $\Rightarrow$ teist liiki sammu (numbrite ümberjärjestamine). Lisaks tähistagu $\rightarrow^k$ esimest liiki sammu tegemist k korda järjest. Märkame, et

$$1 \rightarrow^9 512 \Rightarrow 125 \rightarrow^3 1000.$$

Analoogselt

$$1000 \rightarrow^9 512000 \Rightarrow 125000 \rightarrow^3 1000000,$$

$$1000000 \rightarrow^9 512000000 \Rightarrow 125000000 \rightarrow^3 1000000000.$$

b) 3-ga mitte jaguva arvu 2-ga korrutamisel saame 3-ga mitte jaguva arvu. Kuna numbrite ümberjärjestamine ei muuda ristsummat, annab 3-ga mitte jaguva arvu numbrite järjekorra muutmine samuti ainult 3-ga mitte jaguvaid arve. Kuna algne arv 1 ei jagu 3-ga, kuid arv 9876543210 jagub, ei ole viimast võimalik kirjeldatud operatsioonidega saada.

4. *Vastus:* teine.

Lahendus 1. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned} 3^{303} &> 2^{303}, \\ 4^{404} &= (2^2)^{404} = 2^{2\cdot 404} = 2^{808}, \\ 5^{505} &> 4^{505} = (2^2)^{505} = 2^{2\cdot 505} = 2^{1010}. \end{aligned}$$

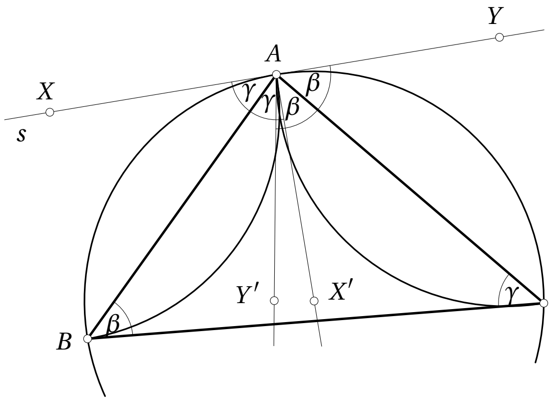
Järelikult

$$3^{303} \cdot 4^{404} \cdot 5^{505} > 2^{303} \cdot 2^{808} \cdot 2^{1010} = 2^{303+808+1010} = 2^{2121} > 2^{2014}.$$

Lahendus 2. Kuna $5^{505} > 3^{505}$ ja $3^2 > 2^3$, siis

$$\begin{aligned}3^{303} \cdot 4^{404} \cdot 5^{505} &> 3^{808} \cdot 4^{404} = \left(3^2\right)^{404} \cdot 4^{404} > \\ &> \left(2^3\right)^{404} \cdot \left(2^2\right)^{404} = 2^{3\cdot 404+2\cdot 404} = 2^{2020} > 2^{2014}.\end{aligned}$$

5. Olgu kolmnurga ABC tippude A, B, C juures olevate nurkade suurused vastavalt α, β, γ. Olgu s sirge, mis puutub kolmnurga ABC ümberringjoont punktis A ning olgu X ja Y vastavalt punktidest B ja C sirgele s tõmmatud ristlõikude aluspunktid (joonis 7). Vastavalt piirdenurkade omadustele $\angle XAB = \gamma$ ja $\angle YAC = \beta$.



Joonis 7

Olgu X' punkti X peegeldus sirgest AB ning Y' punkti Y peegeldus sirgest AC. Ilmselt on sirge AX' kaare AB peegeldamisel saadud kaare puutuja punktis A ning sirge AY' kaare AC peegeldamisel saadud kaare puutuja punktis A. Seega peegeldamisel saadud kaared lõikuvad siis ja ainult siis, kui $\angle BAC < \angle BAX' + \angle CAY'$. Kuna $\angle BAX' = \angle BAX = \gamma$ ja $\angle CAY' = \angle CAY = \beta$, on see tingimus samaväärne võrratusega $\alpha < \beta + \gamma$. Kolmnurga teravnurksuse tõttu aga tõepoolest

$$\alpha < 90^\circ < 180^\circ - \alpha = \beta + \gamma.$$

6. *Vastus:* 4096.

Lahendus 1. Olgu s_n õpetaja seatud nõuet rahuldavate rivistuste arv n tüdruku puhul. Ilmselt $s_1 = 1$. Edasi paneme tähele, et $n + 1$ tüdruku rivistamiseks nõutud viisil võib kõigepealt rivistada kõik tüdrukud peale pikima omavahel — selleks on s_n võimalust — ja seejärel lisada pikima tüdruku. Sõltumata sellest, kuidas on rivistatud n lühemat tüdrukut, ei saa pikimat tüdrukut lisada ühegi kahe rivis oleva tüdruku vahele, kuna nii jääks tema kummalegi käele temast lühem tüdruk. Rivi otstesse saab pikima tüdruku aga lisada: tema enda ühele käele jääks vaba koht ning endise otsmise tüdruku uue naabrina ta samuti reeglit ei riku. Otstesse lisamiseks on 2 võimalust. Järelikult $s_{n+1} = 2s_n$. Selle valemi põhjal leiame $s_{13} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{\text{12 tegurit}} \cdot 1 = 2^{12} = 4096$.

Lahendus 2. Õpetaja seatud tingimusest järeldub, et lühima tüdruku poolt rivis kummaski suunas vaadates peavad tüdrukud paiknema pikkuse kasvamise järjestuses. Rivi moodustamiseks piisab igal tüdrukul peale lühima valida, kummal pool lühimat tüdrukut ta seisab, kummagi poole tüdrukute omavaheliseks järjestamiseks on vaid üks võimalus. Et poolt valivate tüdrukute arv on 12, on kahte ossa jaotumise võimalusi 2^{12} ehk 4096.

Lahendused

1. *Vastus:* 1908, 1976, 2012.

Eeldame, et $(x^2+y^2)^n = (xy)^{2014}$ mingite positiivsete täisarvude n, x, y korral. Kuna $x^2+y^2 \geqslant 2xy > xy$, siis $n < 2014$. Olgu $d = \text{SÜT}(x,y)$ ning $a = \dfrac{x}{d}$, $b = \dfrac{y}{d}$. Siis $d^{2n}(a^2+b^2)^n = d^{2\cdot 2014}(ab)^{2014}$ ehk

$$(a^2+b^2)^n = d^{2\cdot(2014-n)}(ab)^{2014}. \tag{1}$$

Et selle võrduse parem pool jagub b-ga, peab ka $(a^2+b^2)^n$ jaguma b-ga. Kuna aga $\text{SÜT}(a,b) = 1$, siis ka $\text{SÜT}(a^2,b) = 1$ ja $\text{SÜT}(a^2+b^2,b) = 1$, kust $\text{SÜT}((a^2+b^2)^n,b) = 1$. Kokkuvõttes on ainus võimalus $b = 1$. Sümmeetria tõttu ka $a = 1$. Asendades leitud väärtused seosesse (1), saame $2^n = d^{2\cdot(2014-n)}$. Seega $d = 2^k$ mingi k korral ning $n = 2k\cdot(2014-n)$, kust $n\cdot(2k+1) = 4k\cdot 1007$. Kuna $\text{SÜT}(2k+1,4) = 1$ ja $\text{SÜT}(2k+1,k) = 1$, siis $2k+1$ on arvu 1007 tegur. Et $1007 = 19\cdot 53$ ning n peab olema positiivne, siis k võib olla 9, 26 või 503 ning n vastavalt 1908, 1976 ja 2012.

2. *Vastus:* $f(x) = 0$ ja $f(x) = 1$.

Lahendus 1. Võttes algses võrrandis $x = y = 0$, saame $\big(f(0)\big)^2 = f(0)$. Seega $f(0) = 0$ või $f(0) = 1$.

Fikseerides algses võrrandis vaid $x = 0$, saame iga y korral $\big(f(y)\big)^2 = f(0)$. Kui $f(0) = 0$, siis tähendab see, et iga reaalarvu y korral $f(y) = 0$. Kui $f(0) = 1$, siis iga reaalarvu y korral kas $f(y) = 1$ või $f(y) = -1$. Oletame, et leidub reaalarv a, mille korral $f(a) = -1$. Valides algses võrrandis $x = -a$ ja $y = a$, saame $f(0)f(a) = f(0)$, kust $f(a) = 1$. Vastuolu a valikuga näitab, et tegelikult iga y korral $f(y) = 1$.

Kontroll näitab, et mõlemad leitud lahendid sobivad.

Lahendus 2. Kui leidub reaalarv y, mille korral $f(y) = 0$, siis saame algsest võrrandist $0 = f(x)$ iga x korral.

Kui iga reaalarvu y korral $f(y) \neq 0$, siis valides algses võrrandis $x = \dfrac{y}{f(y)}$, saame

$$f\left(\frac{y}{f(y)}+y\right)\cdot f(y) = f\left(\frac{y}{f(y)}+\frac{y}{f(y)}\cdot f(y)\right) = f\left(\frac{y}{f(y)}+y\right).$$

Jagades saadud samasuse pooled suurusega $f\left(\frac{y}{f(y)}+y\right)$, saame $f(y)=1$ iga y korral.

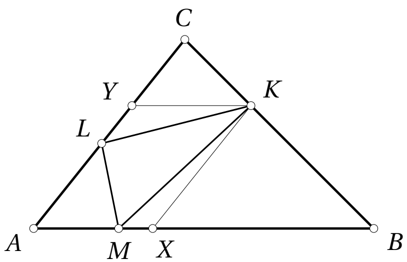
Kontroll näitab, et mõlemad leitud lahendid sobivad.

3. Tähistagu kolmnurga Δ siseringjoone raadiust r_Δ. Kuna ülesande tingimuse põhjal

$$\frac{|AM|}{|MB|}\cdot\frac{|BK|}{|KC|}\cdot\frac{|CL|}{|LA|}=1, \tag{2}$$

võime üldisust kitsendamata eeldada, et $\frac{|AM|}{|MB|}\leqslant 1$ ja $\frac{|CL|}{|LA|}\geqslant 1$. Need võrratused on võrduse (2) valguses samaväärsed vastavalt võrratustega

$$\frac{|CL|}{|LA|}\geqslant\frac{|CK|}{|KB|},\qquad \frac{|BK|}{|KC|}\leqslant\frac{|BM|}{|MA|}. \tag{3}$$



Joonis 8

Olgu X ja Y sellised punktid vastavalt külgedel BA ja CA, et $\frac{|BX|}{|XA|}=\frac{|BK|}{|KC|}$ ja $\frac{|CY|}{|YA|}=\frac{|CK|}{|KB|}$; siis kolmnurgad XBK ja YKC on sarnased kolmnurgaga ABC (joonis 8). Et võrratustest (3) järeldub vastavalt, et punkt Y asub lõigul CL ning punkt X lõigul BM, saame $r_{BMK}\geqslant r_{BXK}$ ja $r_{CKL}\geqslant r_{CKY}$ (kui üks kolmnurk asub üleni teise sees, siis tema siseringjoon on kindlasti väiksem suurimast teise kolmnurga sisse mahtuvast ringjoonest ehk teise kolmnurga siseringjoonest). Seega

$$\begin{aligned} r_{BMK}+r_{CKL}\geqslant r_{BXK}+r_{CKY} &= \frac{|BK|}{|BC|}\cdot r_{ABC}+\frac{|CK|}{|CB|}\cdot r_{ABC}\\ &= \frac{|BK|+|KC|}{|BC|}\cdot r_{ABC}\\ &= \frac{|BC|}{|BC|}\cdot r_{ABC}=r_{ABC}, \end{aligned}$$

millega on vajalik väide tõestatud.

4. *Vastus:* $\left(i \cdot \frac{m}{d}, i \cdot \frac{n}{d}\right)$, kus $d = \text{SÜT}(n, m)$ ja $0 \leqslant i \leqslant d$.

Tähistame $d = \text{SÜT}(n, m)$. Näitame kõigepealt, et igas otsitavas paaris (k, l) kehtib $k = i \cdot \frac{m}{d}$ ja $l = i \cdot \frac{n}{d}$, kus $0 \leqslant i \leqslant d$. Kuna ridade kaupa ja veergude kaupa loendades saame sama arvu märgistatud ruute, siis $nk = ml$, kust

$$\frac{n}{d} \cdot k = \frac{m}{d} \cdot l. \tag{4}$$

Et arvud $\frac{n}{d}$ ja $\frac{m}{d}$ on ühistegurita, peab l olema arvu $\frac{n}{d}$ kordne ja k arvu $\frac{m}{d}$ kordne. Võrdus (4) näitab, et vastavad kordajad ühtivad. Seega $k = i \cdot \frac{m}{d}$ ja $l = i \cdot \frac{n}{d}$ mingi naturaalarvu i jaoks. Seejuures $i \leqslant d$, sest $i \cdot \frac{m}{d} = k \leqslant m = d \cdot \frac{m}{d}$ (reas ei saa olla rohkem ruute märgistatud kui seal ruute kokku on).

Jääb üle näidata, et kõik vaadeldud omadusega paarid sobivad. Valime suvaliselt täisarvu i lõigult $[0, d]$. Jaotame $n \times m$ ruudustiku ruutudeks mõõtmetega $d \times d$. Kui igas sellises ruudus märgistada ruudud nii, et selle ruudu igas reas ja igas veerus on täpselt i märgistatud ruutu, siis kogu $n \times m$ ruudustiku igas reas on $i \cdot \frac{m}{d}$ ja igas veerus $i \cdot \frac{n}{d}$ märgistatud ruutu ning vajalik väide on tõestatud. Aga $d \times d$ ruudus saab nõutava märgistuse, valides esimeses reas i ruudukest järjest ja kopeerides selle rea märgistust teistesse ridadesse piki ruudu diagonaali (ridu tuleb arvestada tsükliliselt, st ruudu piirest väljumisel tehakse märgistus vastav arv ruute vastasküljest).

5. *Vastus:* a) jah; b) ei.

a) Näitame, et kui tünn asub algselt Tatika aias, siis Tatikas saab tünni kätte. Selleks tuleb tal avakäigul minna oma poole aeda. Kuna Vesipruulil pole võimalik isegi mitte topeltkäiguga tünni oma poole aeda üle viia, saab Tatikas järgmise topeltkäiguga haarata tünni oma valdusse ja tuppa põgeneda.

b) Eeldame, et tünn asub algselt Vesipruuli aias. Kui Tatikas läheb oma avakäigul oma poole aeda, saab Vesipruul osas a) kirjeldatud strateegiaga sümmeetriliselt toimetades võita. Kui Tatikas läheb avakäigul Vesipruuli poole ja haarab kohe ka tünni, saab Vesipruul samuti võita, minnes vastuseks Tatika poolele. Kui Tatikas ületab tünniga aia, haarab Vesipruul topeltkäiguga talt tünni ja ronib oma poolele. Et topeltkäik on ära kasutatud, ei õnnestu Tatikal takistada Vesipruuli tünni järgmise käiguga tuppa toimetamast.

Seega peab Tatikas kiire kaotuse vältimiseks minema avakäigul Vesipruuli poole aeda, kuid mitte kohe tünni haarama. Kui nüüd Vesipruul läheks oma poole aeda ja haaraks ka tünni, saaks Tatikas võita, haarates tünni tagasi ja ületades aia. Kui Vesipruul läheks oma avakäigul hoopis Tatika poolele, saaks Tatikas võita, haarates tünni enda valdusse. Kuna ta ähvardab topeltkäiguga ületada aia ja tuppa kaduda, on Vesipruul sunnitud minema oma poolele ja Tatikalt tünni haarama. Siis aga vastaks Tatikas topeltkäiguga, haarates tünni tagasi, ületades aia ning tekitades tuttava võiduseisu.

Järelikult peab Vesipruul vastama avakäigul minekuga oma poole aeda ilma tünni haaramata. Kuna Vesipruul võib järgmisel käigul topeltkäiguga haarata tünni ja võita, on Tatika ainus võimalus ise topeltkäiguga tünn haarata ja üle aia toimetada. Seejärel on Vesipruuli ainus võimalus kaotust vältida topeltkäiguga ületada aed ja tünn tagasi haarata.

Järgnevalt saab Tatikas takistada Vesipruuli võitu, krabades tünni endale kohe ja ka edaspidi, kui Vesipruul temalt tünni uuesti ära võtab. Samamoodi saab Vesipruul takistada Tatika võitu. Seega ei saa kumbki pool võitu garanteerida.

Matemaatika lahtine võistlus

4. oktoober 2014 **Noorem rühm**

Hindamisskeemid

1. *(Aleksei Lissitsin)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

   - Tõestatud, et n ei saa olla 1- või 2-kohaline: 1 p
   - Tõestatud, et n ei saa olla 3-kohaline: 2 p
   - Tõestatud, et 4-kohaline n ei saa alata 10-ga või 11-ga: 2 p
   - Õige vastus: 2 p

   Kui skeemis märgitud asjade eest punkte ei saanud, kuid oli toodud mingi teine 4- või 5-kohaline arv n, mille korral tingimus kehtib, siis ülesande eest anti 1 punkt.

   See ülesanne on sisuliselt lihtne, aga nõuab siiski korralikku minimaalsuse tõestust. Kuigi valdav osa võistlejaist leidis õige vastuse, said ainult mõned neist selle tõestusega hakkama.

2. *(Raul Kangro)* Lahenduse allpool kirjeldatud osade eest antud punktid liideti.

   - Pandud tähele, et ülesande lahendamisel võib eeldada, et ridades on $20, 21, \ldots, 29$ tooli: 1 p
   - Toodud idee vähima hõivatud toolide arvuga paigutuse konstrueerimiseks: 1 p
   - Toodud näide optimaalsest paigutusest (või eeskiri selle moodustamiseks): 2 p
   - Selgelt välja toodud väited suvalise tingimustele vastava hõivatud toolide paigutuse kohta (igas järjestikuses toolikolmikus on vähemalt üks hõivatud, esimeses kahes ja viimases kahes peab istuma vähemalt üks inimene): 1 p
   - Toolid sobivalt rühmitatud nii, et suvalise ülesannete tingimustele vastava hõivatud toolide paigutuse korral oleks igas rühmas kindlasti vähemalt üks tool hõivatud: 1 p
   - Tõestus korrektselt lõpetatud: 1 p

   On väga tähtis aru saada, et sellise ülesande puhul tuleb vastuse põhjendamisel näidata kahte asja: a) saavutatavust, st et vastava arvu toolide hõivamise teel on tõepoolest võimalik saavutada olukord, kus Jukule enam ei leidu sobivat kohta; b) optimaalsus, st vähema arvu toolide hõivamisel ei ole kuidagi võimalik mainitud olukorda saavutada. Enamik lahendajatest üritasid neid kahte osa ühendada, vaadeldes hõivatud toolide mingit nn „parimat paigutust“, kuid ei näidanud, et nende poolt vaadeldud paigutus on tõepoolest parim võimalik. Tegelikult on ju kolmega mittejaguva toolide arvuga rea korral palju „parimaid“ paigutusi ja väited, et optimaalse paigutuse korral *peavad* hõivatud toolid paiknema mingi konkreetse skeemi kohaselt, ei ole õiged.

3. *(Ahti Peder)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- a)-osa: 3 p
- b)-osa: 4 p

Kui ülesandes ei olnud vastatud kummalegi osale õigesti, kuid kirjapandust oli võimalik näha arvudeni 1000000000 ja 9876543210 jõudmiseks kasutatavaid eelnevaid arve, millest saaks siis tuletada õige vastuse, võis saada kuni 1 punkti.

Kahjuks said paljud õpilased tekstist valesti aru, justkui tähendaks numbrite ümberjärjestamine tingimata numbrite järjekorra muutmist vastupidiseks. Tegelikult tähendab ümberjärjestamine paigutamist ükskõik millisesse järjekorda.

4. *(Terje Hõim)* Ülesande lahendamiseks pakuti enamasti ühte järgnevatest lahendusvariantidest.

a) Mõlema poole viimine alusele 2 ja siis astendajate võrdlemine (žürii lahendused 1 ja 2).

b) Mõlemale poole uue aluse leidmine sama astendajaga 101 (ja seega aluste võrdlemine).

c) Vasakul ja paremal pool olevate arvude numbrikohtade pikkuste hindamine ja võrdlemine.

Tüüpiliste mõttekäikude eest jagati punkte järgmiselt.

- Vale vastus ilma põhjendusteta või minimaalse mitte kuhugi viiva lahendusega: 0 p
- Õige vastus ilma põhjenduseta või minimaalse mitte kuhugi viiva lahendusega: 1 p
- Arvu numbrikohtade hindamine vastavalt detailide rohkusele, aga siiski mitte piisava tõestusega: 2–4 p
- Ülal mainitud lahendusvariantide 1 või 2 läbiviimine minimaalsete vigadega: 5–6 p
- Korrektne lahendus: 7 p

5. *(Janno Veeorg)* Tüüpiliste mõttekäikude eest anti punkte järgnevalt.

- Mõni kasulik tähelepanek: 1 p

- Täislahendus väikeste puudustega: 6 p
- Täislahendus: 7 p

6. *(Aleksandr Šved)* Tüüpiliste mõttekäikude eest anti punkte järgnevalt.

- Tähele pandud, et pikim tüdruk peab seisma ääres: 1 p
- Tähele pandud, et tüdruku lisamisel variantide arv suureneb kahekordselt ja õige vastuse väljatoomine: 2 p
- Täislahendus: 7 p

Vigade ja ebatäpsuste eest võeti 1–2 punkti maha.

Hindamisskeemid

1. *(Urve Kangro)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.
   - Näidatud, et $n < 2014$: 2 p
   - Võrrand taandatud x ja y suurima ühisteguriga: 1 p
   - Järeldatud, et taandatud võrrandis peavad mõlemad muutujad võrduma ühega: 1 p
   - Järeldatud, et $x = y = 2^k$: 1 p
   - Järeldatud, et $2k + 1$ on 2014 jagaja: 1 p
   - Leitud vastavad n väärtused: 1 p

   Ainult juhu $x = y$ vaatlemise eest sai kuni 3 punkti, kuna sel juhul sai kõik lahendid kätte, aga jäi põhjendamata, miks rohkem võimalusi pole. Tüüpilisemateks vigadeks oli mõlemast poolest n-nda juure võtmine ja siis järeldamine, et n peab olema 2014 jagaja, või siis mingil alusel logaritmimine ja järeldamine, et see logaritm peab olema täisarv. Ainult selle näitamise eest, et x ja y peavad mõlemad olema paaris, punkte ei saanud.

2. *(Mark Gimbutas)* Tüüpiliste mõttekäikude eest anti punkte järgmiselt.
   - Näidatud, et kui mingi y korral $f(y) = 0$, siis iga x korral $f(x) = 0$: 2 p
   - Näidatud, et $\big(f(y)\big)^2 = f(0)$ ja $f(0) = 0$ või $f(0) = 1$ ning ei ole pööratud tähelepanu olukorrale, kus $f(y) = -1$: 4 p
   - Näidatud, et $\big(f(y)\big)^2 = f(0)$ ja $f(0) = 0$ või $f(0) = 1$, ning välistatud, et f on konstantne funktsioon $f(y) = -1$, kuid pole näidatud, et olukord $f(y) = -1$ on võimatu mistahes reaalarvu y korral: 5 p
   - Täielik lahendus: 7 p

   Paljud õpilased jõudsid õige vastuseni, kitsendades oma otsinguid ainult konstantsetele funktsioonidele. Kuna aga funktsioonide jaotamine konstantseteks ja mittekonstantseteks ei paista aitavat näidata, et nõutud omadusega funktsioone rohkem ei ole, siis taolised lahendused punkte ei saanud. Samuti ei antud punkte selle levinud võtte eest, kui mõnel konkreetsel kujul oleva funktsiooni (näiteks ruutfunktsioon või logaritmfunktsioon) kohta näidati, et see ei ole lahend. Kõigil reaalarvudel määratud ja reaalarvuliste väärtustega funktsioone on väga palju ja märkimisväärset osa neist ei õpitagi koolis.

Asjaolust, et iga reaalarvu y korral kehtib $\left(f(y)\right)^2 = 1$, ei järeldu, et f on konstantne funktsioon $f(y) = 1$ või $f(y) = -1$. Näiteks on eeltoodud tingimus täidetud ka sellise mittekonstantse funktsiooni f puhul, kus $f(y) = -1$ iga nullist erineva y korral, kuid $f(0) = 1$. Selle vastu eksisid mitmed võistlejad, kes muidu jõudsid täislahendusele üsna lähedale.

3. *(Laur Tooming)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Muidu täielikus lahenduses eeldatud ühe võrratuse kehtivust lõikude suhete vahel, mis on jäänud tõestamata: 5 p
- Täielik lahendus: 7 p

Ülesanne osutus raskeks, punkte said ainult kaks võistlejat.

4. *(Härmel Nestra)*

Lahenduse allpool märgitud etappide eest antud punktid summeeriti.

- Esitatud õige ja täielik vastus: 1 p
- Konstrueeritud näide iga sobiva paari (k, l) jaoks: 3 p

  Sealhulgas tüüpiliste osaliste mõttekäikude eest:
  - Üldjuhu jaoks formuleeritud ruutude diagonaalide kaupa märkimine, kuid ilma sobivuse tõestuseta: *1 p*
- Tõestatud, et teiste paaride (k, l) korral pole konstruktsioon võimalik: 3 p

  Sealhulgas:
  - Märgitud, et $kn = ml$ või midagi ilmselgelt samaväärset: *1 p*
  - Tuletatud sellest $k = i \cdot \frac{m}{d}$ ja $l = i \cdot \frac{n}{d}$, kus $d = \text{SÜT}(n, m)$: *1 p*
  - Põhjendatud tõke $i \leqslant d$: *1 p*

Vastuseid esitati üsna mitmel kujul. Õigeks loeti ka vastus „kõik paarid kujul $\left(i \cdot \frac{m}{d}, i \cdot \frac{n}{d}\right)$, kus d on m ja n ühisjagaja ning $i \leqslant d$“. Mõnes töös oli vastuseks pakutud „kõik paarid (k, l), kus $kn = ml$ ja $k \leqslant m$, $l \leqslant n$“. Sellised tööd said maksimaalselt 5 punkti. Kuigi see vastus peab väitena paika, ei saa selliseid töid täislahenduseks lugeda, sest vastuse mõte on anda lihtne algoritm, millega kõik sobivad objektid genereerida saab. Paaride (k, l), kus $kn = ml$, genereerimiseks ei ole ilmselget lihtsat algoritmi. Samahästi võiks vastuseks kirjutada „need paarid (k, l), mis rahuldavad ülesandes kirjeldatud tingimust“, mis on ju samuti väitena absoluutselt õige, aga ei tee ühtki sammu nende paaride hulgast reaalse ülevaate saamiseks.

Paari $(0, 0)$ või (m, n) lahendite hulgast väljajätmise eest punkte maha ei võetud. Kui aga m ja n või k ja l olid omavahel segi aetud, siis vastuse ega ka tõestuse osa eest (skeemi viimased 3 punkti) punkte ei saanud. Samuti ei saanud punkte erijuhtude läbivaatamise eest ($n = m$, n ja m algarvud vms).

5. *(Oleg Košik)* Lahenduse allpool märgitud osade antud punktid summeeriti.

- Osa a): 2 p
- Osa b): 5 p

Juhul kui osas b) olid vaid ära toodud mängijate optimaalsed käigud mängu alguses ja väidetud, et pärast nad jäävadki üksteiselt tünni haarama ning mäng jääb viiki, kuid selgitused puudusid, anti osa b) eest 1 punkt.

Žürii lahenduse korral tuli kindlasti ammendavalt põhjendada, miks just antud käigud mängijate poolt on optimaalsed. Samuti oleks vaja detailselt selgitada, miks lõppolukorras pole kummalgi mängijal enam võimalik võitu saavutada, sest lisaks tünni haaramisele on lubatud operatsioon näiteks üle aia ronimine.

Lisaks žürii lahendusele esines ka lähenemine, kus nii Tatika kui Vesipruuli jaoks on ära toodud strateegia, mille abil nad kindlasti ei kaota. Ka sellisel juhul tuleb lisaks strateegia äramärkimisele kindlasti selgitada, miks on strateegia alati rakendatav ning miks ei või selle abil kaotada.

Mõnikord esines lahendajatel raskusi ülesande teksti õige mõistmisega. Näiteks ei pandud tähele, et avakäigul saab mängija ühe operatsiooniga jõuda aeda nii enda kui ka vastase poolele. Kui tekstis on öeldud, et käike tehakse kordamööda, siis pole lubatud käigu vahelejätmine.

Lõpetuseks on tore märkida, et lahenduste põhjal otsustades meeldis see ülesanne paljudele lahendajatele.