Lahtine võistlus: 2014 talv

Matemaatika lahtine võistlus

7. detsember 2014 **Noorem rühm**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Järjestikused positiivsed täisarvud alates arvust 1 on kümnekaupa rühmadesse jaotatud nii, et 1. rühmas on arvud 1 kuni 10, 2. rühmas arvud 11 kuni 20, 3. rühmas arvud 21 kuni 30 jne. Kas leidub selline positiivne täisarv, et tema enda ja tema rühmanumbri summa on 2014?

2. Tähistagu d_n arvu või selle osa, mis koosneb n järjestikusest numbrist d. Näiteks kirjutis 4_3 tähistab arvu 444 ja $1_2 5_3 8_2 9_1$ arvu 11555889. On teada, et kehtib võrdus $3_a 2_b 5_c + 2_c 5_a 3_b = 5_3 8_1 7_d 5_2 8_3$, kus a, b, c ja d on mingid positiivsed täisarvud. Leia arvud a, b, c ja d.

3. Tõesta, et mistahes positiivsete täisarvude n ja m vähima ühiskordse ruut jagub korrutisega nm ning nm omakorda jagub arvude n ja m suurima ühisteguri ruuduga.

4. Ühes sirges reas on 2015 laternaposti. Iga kahe naaberposti vahe on täpselt 1 meeter. Kui võime ainult ühe posti otsa panna põleva laterna ning tahame, et selle kauguste summa kõikidest teistest postidest oleks vähim võimalik, siis millise posti otsa tuleb see latern panna?

5. Olgu ABC teravnurkne kolmnurk, H selle kõrguste lõikepunkt ning AA' kolmnurga ABC ümberringjoone diameeter. Tõesta, et nelinurk $HBA'C$ on rööpkülik.

6. Mõõtmetega $m \times n$ ruudustikus värvitakse iga ühikruut mustaks või valgeks, nii et ühelgi neist ruutudest moodustuval ristkülikul, kus mõlema külje pikkus on 1-st suurem, ei ole kõik neli nurgaruutu sama värvi. Leia kõik võimalused, milline saab olla arv n, kui:

a) $m = 2$;

b) $m = 3$;

c) $m = 4$?

Matemaatika lahtine võistlus

7. detsember 2014 **Vanem rühm**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Kas leidub selline täisarv x, et $2 \leqslant x \leqslant m-1$ ja $x^2 - x$ jagub arvuga m, kui

a) $m = 2014$;

b) $m = 2015$?

2. Leia võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x(y-1) + y(x+1) = 6 \\ (x-1)(y+1) = 1 \end{cases}$$

kõik reaalarvulised lahendid.

3. Leia kõik sellised neljakohalised naturaalarvud, mille jagatis oma numbrite summaga on võimalikest vähim.

4. Leia kõik sellised funktsioonid f, mis on määratud kõigi reaalarvude hulgal, omandavad reaalarvulisi väärtusi ning rahuldavad mistahes reaalarvude x ja y korral tingimust

$$f(x^2) + f(xy) = f\big(f(x+y)\big) .$$

5. Kolmnurga K_2 tippudeks on mitte-täisnurkse kolmnurga K_1 kõrguste aluspunktid. Leia kõik võimalused kolmnurga K_1 nurkade suuruste jaoks, mille korral kolmnurgad K_1 ja K_2 on sarnased.

6. Uhhuu hõimu huiked koosnevad ainult tähtedest U ja H; sõnavahesid ja kirjavahemärke ei kasutata. Hõim järgib tabu, mille järgi ei tohi huike ükski algusosa korduda vahetult selle algusosa järel. Näiteks huiked **UU**HUU ja **HUHU**U on keelatud, kuid UHHUH ja HUHHU on lubatud. Hõimupealik kontrollib iga uue huike lubatavust, võrreldes järjest selle algusosi pikkusega $1, 2, \ldots$ neile vahetult järgnevate niisama pikkade osadega tähthaaval vasakult paremale kuni esimese erinevuse leidmiseni. Mõistagi kontrollib ta ainult selliseid algusosi, mille pikkus ei ületa poolt kogu huike pikkusest. Olgu $l(H)$ tähtede arv huikes H ning $c(H)$ tähevõrdluste koguarv, mida pealik sooritab huike H kontrollimisel. Kas leidub selline lubatud huige H, mille korral $\dfrac{c(H)}{l(H)} > 100$?

Открытое соревнование по математике

7 декабря 2014 г. **Младшая группа**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Последовательные положительные целые числа, начиная с числа 1, разбиты на группы по десять так, что в 1-ой группе находятся числа от 1 до 10, во 2-ой от 11 до 20, в 3-ой от 21 до 30 и т. д. Существует ли такое положительное целое число, что сумма его самого с номером его группы равна 2014?

2. Пусть d_n обозначает число или часть числа, состоящую из n последовательных цифр d. Например, запись 4_3 обозначает число 444, а $1_25_38_29_1$ обозначает число 11555889. Известно, что имеет место равенство $3_a2_b5_c + 2_c5_a3_b = 5_38_17_d5_28_3$, где a, b, c и d какие-то положительные целые числа. Найти числа a, b, c и d.

3. Доказать, что квадрат наименьшего общего кратного произвольных положительных целых чисел n и m делится на их произведение nm, а nm в свою очередь делится на квадрат наибольшего общего делителя чисел n и m.

4. В ряд один за одним стоят 2015 фонарных столбов. Расстояние между каждыми двумя соседними столбами ровно 1 метр. Допустим, что мы можем зажечь фонарь только на одном столбе и хотим, чтобы сумма расстояний от этого столба до всех остальных была наименьшей. На каком столбе нужно зажечь фонарь?

5. Пусть ABC – остроугольный треугольник, H – точка пересечения его высот, и AA' – диаметр окружности, описанной вокруг ABC. Доказать, что четырёхугольник $HBA'C$ является параллелограммом.

6. На клетчатом поле размером $m \times n$ каждая клетка либо чёрная, либо белая. При этом ни в одном прямоугольнике, состоящем из клеток, длины обоих сторон которого больше 1, все четыре угловые клетки не будут одинакового цвета. Найти все возможные значения числа n, если:

а) $m = 2$;

б) $m = 3$;

в) $m = 4$?

Открытое соревнование по математике

7 декабря 2014 г. **Старшая группа**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Существует ли такое целое число x, что $2 \leqslant x \leqslant m-1$, и $x^2 - x$ делится на m, если

а) $m = 2014$;

б) $m = 2015$?

2. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x(y-1) + y(x+1) = 6 \\ (x-1)(y+1) = 1 \end{cases}.$$

3. Найти все такие четырёхзначные натуральные числа, результат деления которых на сумму своих цифр будет наименьшим возможным.

4. Найти все функции f, определённые на множестве всех действительных чисел и принимающие действительные значения, при которых для всех действительных чисел x и y выполняется условие

$$f(x^2) + f(xy) = f\big(f(x+y)\big).$$

5. Вершинами треугольника K_2 являются основания высот непрямоугольного треугольника K_1. Найти все возможные варианты значений углов треугольника K_1, при которых треугольники K_1 и K_2 окажутся подобными.

6. Уханья племени Уххуу могут состоять только из букв У и Х; пробелы и знаки пунктуации не используются. В племени есть табу, по которому в начале уханья не могут непосредственно друг за другом идти два одинаковых отрывка. Например, уханья **УУ**ХУУ и **ХУХУ**У запрещены, а УХХУХ и ХУХХУ разрешены. Вождь племени проверяет допустимость каждого нового уханья, сравнивая по порядку начальные отрывки длиной 1, 2, … с непосредственно следующими за ними отрывками такой же длины побуквенно слева направо, пока не находит первое различие. Очевидно, что он проверяет только такие начальные отрывки, длина которых не больше половины длины всего уханья. Пусть $l(H)$ обозначает число букв в уханьи H, а $c(H)$ – число сравнений букв, которые производит вождь при проверке уханья H. Существует ли такое допустимое уханье H, что $\dfrac{c(H)}{l(H)} > 100$?

Lahendused

1. *Vastus:* ei leidu.

Tähistagu $g(n)$ naturaalarvu n rühmanumbrit ja olgu $s(n) = n + g(n)$.

Arvu n suurenedes saab tema rühmanumber $g(n)$ ja seega ka summa $s(n)$ ainult suureneda. Paneme tähele, et $s(1830) = 1830 + 183 = 2013$ ja $s(1831) = 1831 + 184 = 2015$. Seega mistahes $n \leqslant 1830$ korral on $s(n) \leqslant 2013$ ning mistahes $n \geqslant 1831$ korral $s(n) \geqslant 2015$. Niisiis ei leidu sellist naturaalarvu n, mille korral $s(n) = 2014$.

2. *Vastus:* $a = 4$, $b = 5$, $c = 3$ ja $d = 3$.

Summa viimane number 8 tekib liidetavate viimaste numbrite 5 ja 3 summana. Kuna $2 + 3 = 5$, $5 + 5 = 10$ ja $2 + 5 = 7$, ei saa ka eelnevad kaks numbrit 8 tekkida muul viisil kui summana $5 + 3$. Seega on vaadeldav tehe kujul

$$\begin{array}{r} * * * * * \ldots * * * 5 5 5 \\ + \; * * * * * \ldots * * * 3 3 3 \\ \hline 5 5 5 8 7 \ldots 7 5 5 8 8 8 \end{array}$$

(kus tärnid tähistavad veel kindlakstegemata numbreid).

Tulemuse paremalt vasakule lugedes järgmine number on 5; eelnevalt läbivaadatud tehetest annab ainult $2+3$ summaks 5. Kuna $3+3 = 6$, $2+5 = 7$ ja $3 + 5 = 8$, ei saa ka eelnev number 5 tekkida muul viisil kui summana $2 + 3$. Seega on vaadeldav tehe kujul

$$\begin{array}{r} * * * * * \ldots * 2 2 5 5 5 \\ + \; * * * * * \ldots * 3 3 3 3 3 \\ \hline 5 5 5 8 7 \ldots 7 5 5 8 8 8 \end{array}.$$

Tulemuse paremalt vasakule lugedes järgmine number on 7; eelnevalt läbivaadatud tehetest annab ainult $2 + 5$ summaks 7. Kuna $3 + 5 = 8$, $2 + 2 = 4$ ja $3 + 2 = 5$, ei saa ka eelnevad $d - 1$ numbrit 7 tekkida muul viisil kui summana $2 + 5$. Seega on vaadeldav tehe kujul

$$\begin{array}{r} * * * * 2 \ldots 2 2 2 5 5 5 \\ + \; * * * * 5 \ldots 5 3 3 3 3 3 \\ \hline 5 5 5 8 7 \ldots 7 5 5 8 8 8 \end{array}.$$

Tulemuse paremalt vasakule lugedes järgmine number on 8; eelnevalt läbivaadatud tehetest annab ainult $3 + 5$ summaks 8. Jäävad veel tulemuse alguses olevad kolm numbrit 5, mis saavad tekkida vaid summana $3 + 2$. Seega on vaadeldav tehe kujul

$$\begin{array}{r} 3\,3\,3\,3\,2\ldots\,2\,2\,2\,5\,5\,5 \\ +\ 2\,2\,2\,5\,5\ldots\,5\,3\,3\,3\,3\,3 \\ \hline 5\,5\,5\,8\,7\ldots\,7\,5\,5\,8\,8\,8 \end{array}.$$

Esimese liidetava algusest loeme kokku $a = 4$, teise liidetava lõpust $b = 5$ ja teise liidetava algusest $c = 3$. Kuna esimeses liidetavas peab numbrit 2 olema 5 korda, saame ainsa võimalusena $d = 3$. See on kooskõlas ka numbrite 5 arvuga 4 teises liidetavas.

3. Arvude m ja n vähim ühiskordne $\text{VÜK}(m, n)$ jagub nii m-ga kui ka n-ga, st leiduvad sellised täisarvud a ja b, et $\text{VÜK}(m, n) = am = bn$. Seega $(\text{VÜK}(m, n))^2 = ab \cdot mn$, st arvude m ja n vähima ühiskordse ruut jagub korrutisega mn.

Arvude m ja n suurim ühistegur $\text{SÜT}(m, n)$ on nii m kui ka n teguriks, st leiduvad sellised täisarvud c ja d, et $m = c\cdot\text{SÜT}(m, n)$ ja $n = d\cdot\text{SÜT}(m, n)$. Seega $mn = cd \cdot (\text{SÜT}(m, n))^2$, st korrutis mn jagub nende arvude suurima ühisteguri ruuduga.

4. *Vastus:* latern tuleb riputada keskmise posti otsa.

Lahendus 1. Kui latern on keskmise posti otsas, on tema kauguste summa kõigist ülejäänud postidest

$$S = (1 + 2 + \ldots + 1007) + (1 + 2 + \ldots + 1007)\ .$$

Kui aga latern on mõne teise posti otsas, kaugusel k keskmisest postist, siis on see summa

$$S' = (1 + 2 + \ldots + (1007 + k)) + (1 + 2 + \ldots + (1007 - k))\ .$$

Leiame, et

$$\begin{aligned} S' - S = {} & (1008 + 1009 + \ldots + (1007 + k)) - \\ & - (1007 + 1006 + \ldots + (1007 - k + 1))\ . \end{aligned}$$

Saadud vähendatavas ja vähendajas on kummaski k liidetavat, kusjuures vähendatava iga liidetav on suurem vähendaja vastavast liidetavast. Järelikult on vahe $S' - S$ positiivne, mis tähendab, et laterna kauguste summa kõigist ülejäänud postidest on vähim siis, kui ta on keskmise posti otsas.

Lahendus 2. Riputame laterna algul keskmise posti otsa ja hakkame teda liigutama posthaaval paremale. Igal sammul suureneb 1 võrra laterna kaugus igast postist, mis jääb laterna uuest asukohast vasakule, ning väheneb 1 võrra kaugus igast ülejäänud postist. Et uuest asukohast vasakule jäävaid poste on rohkem kui pool kõigist postidest, siis laterna kauguste summa kõigist postidest suureneb igal sammul.

Analoogiliselt suureneb järjest laterna kauguste summa kõigist postidest, kui riputada ta algul keskmise posti otsa ja liigutada siis posthaaval vasakule. Niisiis on kauguste summa vähim, kui riputada latern keskmise posti otsa.

Märkus. Siin vaatleme formaalselt laterna kauguste summat *kõigist* postidest, mitte *kõigist ülejäänud* postidest (peale selle posti, mille otsa latern on riputatud). Ent need kaks summat on võrdsed, sest laterna kaugus sellest postist, mille otsas ta on, on 0.

5. *Lahendus 1.* Et ringjoone diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk, siis

$$\angle HBA' = 90^\circ - \angle ABH = \angle A$$

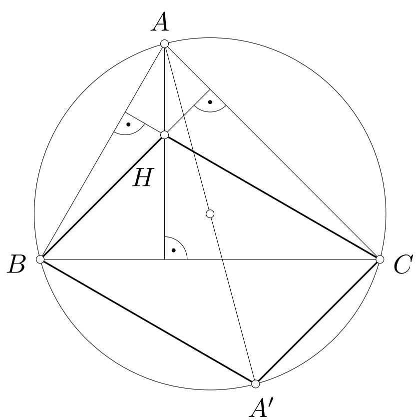
ning analoogiliselt ka

$$\angle HCA' = 90^\circ - \angle ACH = \angle A$$

(vt joonist 1). Lisaks

$$\angle BA'C = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - \angle A = 180^\circ - \angle A\,.$$

Niisiis on $HC \parallel BA'$ ja $HB \parallel CA'$, st nelinurk $HBA'C$ on rööpkülik.

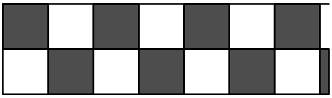


Joonis 1

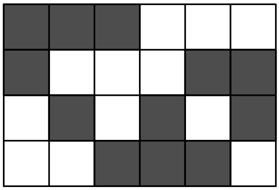
Lahendus 2. Et piirdenurk $A'BA$ toetub ringjoone diameetrile, siis $A'B$ ja AB on risti. Et ka CH ja AB on risti, siis $CH \parallel A'B$. Analoogselt näitame, et $BH \parallel A'C$. Seega $HBA'C$ on kahe paari paralleelsete vastasküljedega nelinurk, st rööpkülik.

6. *Vastus:* a) kõik n; b) $n \leqslant 6$; c) $n \leqslant 6$.

a) Värvime ruudustiku malekorras (vt joonist 2). Siis üheski $2 \times k$ ristkülikus ilmselt ei ole kõik nurgaruudud sama värvi ning suuremaid ristkülikuid ruudustikus ei leidu.



Joonis 2



Joonis 3

b)–c) Paneme tähele, et $m \times n$ ruudustiku nõutav värvimine annab meile ka tema mistahes $m' \times n'$ alamruudustiku nõutava värvimise, kus $m' \leqslant m$ ja $n' \leqslant n$. Tõepoolest, iga $m' \times n'$ alamruudustiku ruutudest koosnev ristkülik on vaadeldav ümbritseva $m \times n$ ruudustiku ruutudest koosneva ristkülikuna ning tema nurgaruudud ei saa seega olla kõik sama värvi.

Seega piisab näidata, et 3×7 ruudustikku ei saa nõutaval viisil värvida, aga 4×6 ruudustiku saab.

Tõepoolest, olgu 3×7 ruudustik paigutatud nii, et ta koosneb 3 horisontaalsest 7-ruudulisest reast. Siis mistahes värvimise korral leidub igas reas vähemalt 4 üht värvi ruutu — üldisust kitsendamata eeldame, et ülemises reas on 4 musta ruutu. Kummaski alumises reas saab neis 4 veerus olla ülimalt 1 must ruut, sest vastasel korral leiduks ristkülik, mille kõik neli nurgaruutu on mustad. Kuid siis on nende 4 veeru hulgas vähemalt 2 sellist, kus mõlemas alumises reas on valged ruudud, st leidub ristkülik, mille kõik neli nurgaruutu on valged.

Näide 4×6 ruudustiku sobivast värvimisest on joonisel 3.

Lahendused

1. *Vastus:* a) jah; b) jah.

a) Teguriteks lahutades saame $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$. Võttes $x = 19 \cdot 53 = 1007$, saame $x - 1 = 1006 = 2 \cdot 503$, st $x^2 - x = x(x-1) = 2014 \cdot 503$.

b) Teguriteks lahutades saame $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Võttes $x = 2 \cdot 13 \cdot 31 = 806$, saame $x - 1 = 805 = 5 \cdot 161$, st $x^2 - x = x(x-1) = 2015 \cdot 2 \cdot 161$.

Märkus: Lahenduses näidatud võimalused ei ole ainsad. Juhul a) sobivad x väärtusteks arvud 266, 742, 1007, 1008, 1273 ja 1749; juhul b) sobivad arvud 156, 651, 806, 1210, 1365 ja 1860.

2. *Vastus:* $x = \frac{4}{3}$, $y = 2$ või $x = -2$, $y = -\frac{4}{3}$.

Lahendus 1. Avades mõlemas võrduses sulud ja koondades vabaliikmed, saame

$$\begin{cases} 2xy - x + y = 6\,, \\ xy + x - y = 2\,. \end{cases}$$

Lahutades nüüd esimese võrduse pooltest 2-ga korrutatud teise võrduse vastavad pooled, saame

$$3y - 3x = 2\,, \tag{1}$$

nende võrduste liitmisel saame aga

$$3xy = 8\,. \tag{2}$$

Võrdusest (1) avaldame

$$3y = 3x + 2\,. \tag{3}$$

Asendades selle võrdusesse (2), saame

$$x(3x+2) = 8$$

ehk

$$3x^2 + 2x - 8 = 0\,.$$

Selle ruutvõrrandi lahenditeks on $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 3 \cdot 8}}{6} = \frac{-2 \pm 10}{6}$, st $x_1 = \frac{4}{3}$ ja $x_2 = -2$. Võrdusest (3) leiame, et $y_1 = 2$ ja $y_2 = -\frac{4}{3}$. Kontrollides veendume, et mõlemad lahendid sobivad.

Lahendus 2. Teisest võrdusest saame $y + 1 = \dfrac{1}{x-1}$, kust

$$y = \frac{1}{x-1} - 1 = \frac{2-x}{x-1} \tag{4}$$

ja

$$y - 1 = \frac{1}{x-1} - 2 = \frac{3-2x}{x-1} .$$

Asendades need esimesse võrdusesse, saame

$$\frac{x(3-2x)}{x-1} + \frac{(2-x)(x+1)}{x-1} = 6$$

ehk

$$x(3-2x) + (2-x)(x+1) = 6(x-1) .$$

Avades siin sulud ja koondades sarnased liikmed, saame ruutvõrrandi

$$-3x^2 - 2x + 8 = 0 .$$

Samuti nagu eelmises lahenduses leiame siit lahendid $x_1 = \dfrac{4}{3}$ ja $x_2 = -2$. Võrdusest (4) saame vastavalt $y_1 = 2$ ja $y_2 = -\dfrac{4}{3}$.

3. *Vastus:* 1099 on ainus selline arv.

Paneme tähele, et fikseeritud numbrite summa korral on arv (ja seega ka jagatis) vähim siis, kui tema esimesed numbrid on võimalikult väikesed ja viimased numbrid võimalikult suured. Seega piisab võrrelda jagatisi vaid selliste arvude korral, mida saame arvust 1000 järjest suurendades selle numbreid kuni 9-ni, alustades viimasest numbrist (st arvude 1000 kuni 1009, 1019 kuni 1099, 1199 kuni 1999 ja 2999 kuni 9999 korral).

Veendume nüüd, et sellistest arvudest on arvu enda ja tema numbrite summa jagatis vähim arvu 1099 korral. Tõepoolest, kui alustame arvust 1099 ja suurendame järjest selle teist ja seejärel esimest numbrit, siis suureneb igal sammul arv mitte vähem kui $\dfrac{1999}{1899} > \dfrac{20}{19}$ korda, samas kui numbrite summa suureneb ülimalt $\dfrac{20}{19}$ korda, ehk jagatis läheb igal sammul suuremaks. Kui aga alustame arvust 1099 ja vähendame järjest selle kolmandat ja seejärel neljandat numbrit, siis väheneb igal sammul arv mitte rohkem kui $\dfrac{1019}{1009} < \dfrac{101}{100}$ korda, samas kui summa väheneb vähemalt $\dfrac{19}{18} > \dfrac{101}{100}$ korda, st jagatis läheb ka siin igal sammul suuremaks.

4. *Vastus:* ainult konstantne funktsioon $f(x) = 0$.

Lahendus 1. Võttes antud võrrandis $x = 0$ ja $y = a$, saame

$$2f(0) = f(f(a)) .$$

mis peab kehtima mistahes reaalarvu a korral. Võttes nüüd $a = x + y$, saame antud võrrandist

$$f(x^2) + f(xy) = 2f(0) .$$

Valides siin $x = 1$, saame

$$f(y) = 2f(0) - f(1) ,$$

kus parem pool on konstant. Seega on f konstantne funktsioon: $f(x) = c$, kus c on mingi fikseeritud reaalarv. Asendades selle algsesse võrrandisse, saame

$$c + c = c$$

kust $c = 0$. Seega ainus sobiv funktsioon on $f(x) = 0$. Kontroll näitab, et see funktsioon rahuldab algset võrrandit.

Lahendus 2. Kuna $x + y = y + x$, siis mistahes reaalarvude x ja y korral kehtib

$$f(x^2) + f(xy) = f(f(x + y)) = f(f(y + x)) = f(y^2) + f(yx) ,$$

järelikult $f(x^2) = f(y^2)$. Seega kõigi mittenegatiivsete arvude a korral $f(a) = f\big((\sqrt{a})^2\big) = f(0)$ ehk f on mittenegatiivsete argumentide korral konstantne.

Valime nüüd $x = -y$, siis $f(x^2) + f(-x^2) = f(f(0))$ ja eelneva põhjal $f(-x^2) = f(f(0)) - f(0)$ ehk f on ka kõigi mittepositiivsete argumentide korral konstantne (iga mittepositiivse arvu a korral anname argumendiks $x = \sqrt{-a}$). Kuna argument 0 on korraga nii mittenegatiivne kui ka mittepositiivne, siis järelikult need konstandid $f(0)$ ja $f(f(0)) - f(0)$ on tegelikult võrdsed ja funktsioon f on konstantne kogu reaalarvude hulgal.

Ainsa sobiva funktsiooni leiame nüüd nii, nagu lahenduses 1.

Lahendus 3. Valides antud võrduses $x = 0$ näeme, et $2f(0) = f(f(y))$ iga reaalarvu y korral. Valides algses võrduses $y = 0$ ning arvestades, et $f(f(x)) = 2f(0)$, leiame, et

$$f(x^2) + f(0) = f(f(x)) = 2f(0) ,$$

st $f(x^2) = f(0)$ iga x korral. Valides nüüd algses võrduses $y = -x$ saame, et iga reaalarvu x korral

$$f(x^2) + f(-x^2) = f(f(0)) ,$$

st $f(0)+f(-x^2)=2f(0)$ ehk $f(-x^2)=f(0)$.

Et iga reaalarv a esitub kas kujul $a=x^2$ või kujul $a=-x^2$, siis funktsioon f on konstantne. Ainsa sobiva funktsiooni leiame nüüd nii, nagu lahenduses 1.

Lahendus 4. Valides antud võrduses $x=0$ näeme, et $2f(0)=f(f(y))$ iga reaalarvu y korral. Valides algses võrduses $y=x$ ning arvestades, et $f(f(2x))=2f(0)$, leiame, et

$$2f(x^2)=f(f(2x))=2f(0)\ ,$$

ehk $f(x^2)=f(0)$ iga reaalarvu x korral. Valides algses võrduses $y=1$ saame nüüd, et

$$f(x^2)+f(x)=f(f(x+1))\ ,$$

mis on samaväärne sellega, et

$$f(x)=f(f(x+1))-f(x^2)=2f(0)-f(0)=f(0)\ ,$$

st f on konstantne.

Ainsa sobiva funktsiooni leiame nüüd nii, nagu lahenduses 1.

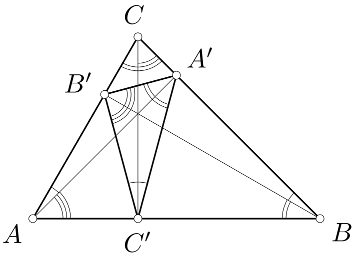
5. *Vastus:* 60°, 60°, 60° või $\dfrac{180^\circ}{7}$, $\dfrac{360^\circ}{7}$, $\dfrac{720^\circ}{7}$.

Olgu kolmnurga K_1 tipud A, B ja C, nende juures olevad sisenurgad vastavalt α, β ja γ ning neist tippudest tõmmatud kõrguste aluspunktid vastavalt A', B' ja C'. Kolmnurgad K_1 ja K_2 on sarnased parajasti siis, kui nende nurgad (mingis järjekorras võetuna) on vastavalt võrdsed. Seega peame leidma kolmnurga K_2 nurgad ning uurima, millal nad on võrdsed kolmnurga K_1 mingite nurkadega. Vaatleme eraldi kaht juhtu.

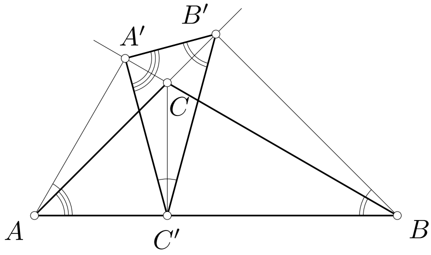
1) Olgu kolmnurk K_1 teravnurkne. Kuna $\angle AA'B=\angle BB'A=90^\circ$, on $ABA'B'$ kõõlnelinurk (vt joonist 4). Seega $\angle B'A'A=\angle ABB'=90^\circ-\alpha$. Analoogiliselt leiame kõõlnelinurgast $ACA'C'$, et $\angle C'A'A=90^\circ-\alpha$. Seega kolmnurga K_2 tipu A' juures on nurk suurusega $180^\circ-2\alpha$. Sarnaselt on tippude B' ja C' juures nurgad suurustega vastavalt $180^\circ-2\beta$ ning $180^\circ-2\gamma$.

Kolmnurgad K_1 ja K_2 on niisiis sarnased, kui $(180^\circ-2\alpha,\ 180^\circ-2\beta,\ 180^\circ-2\gamma)$ on $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ mingi ümberjärjestus. Üldisust kitsendamata olgu $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$, siis $180^\circ-2\gamma\leqslant180^\circ-2\beta\leqslant180^\circ-2\alpha$ ning järelikult peavad kehtima võrdused $\alpha=180^\circ-2\gamma$, $\beta=180^\circ-2\beta$ ja $\gamma=180^\circ-2\alpha$. Siit saame, et $3\beta=180^\circ$ ning $\alpha=4\alpha-180^\circ$, kust $\alpha=\beta=60^\circ$ ja järelikult ka $\gamma=60^\circ$.

2) Olgu kolmnurk K_1 nürinurkne. Üldisust kitsendamata eeldame, et γ on nürinurk. Sarnane nurkade arvutus nagu esimesel juhul näitab, et kolmnurga K_2 nurgad on seekord 2α, 2β ja $2\gamma-180^\circ$ (vt joonist 5). Seega peame uurima, millal $(2\alpha,\ 2\beta,\ 2\gamma-180^\circ)$ on $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ mingi ümberjärjestus.



Joonis 4



Joonis 5

Kuna ükski nurk ei saa olla võrdne oma kahekordsega ning paar (α, β) ei saa olla võrdne paariga $(2\beta, 2\alpha)$, siis võime üldisust kitsendamata eeldada, et $\alpha = 2\gamma - 180^\circ$, $\beta = 2\alpha$ ja $\gamma = 2\beta$. Neist võrdustest saame, et $\alpha = 8\alpha - 180^\circ$, kust $\alpha = \dfrac{180^\circ}{7}$, $\beta = \dfrac{360^\circ}{7}$ ja $\gamma = \dfrac{720^\circ}{7}$.

6. *Vastus:* jah.

Suvalise huike U korral tähistagu $\overline{U}$ temast viimase tähe muutmisel saadavat huiget, ning U_1U_2 tähistagu huigete U_1 ja U_2 järjest kirjutamisel saadavat huiget.

Defineerime nüüd huiked H_k, kus $k = 0, 1, 2, \ldots$, järgmiselt:

$$H_0 = \mathrm{H}\,, \qquad H_{k+1} = H_k\overline{H_k}$$

(st $H_0 = \mathrm{H}$, $H_1 = \mathrm{HU}$, $H_2 = \mathrm{HUHH}$ jne). Ilmselt $l(H_k) = 2^k$.

Näitame, et kõik huiked H_k on lubatud. Olgu i suvaline huike H_k kontrollitava algusosa pikkus, st $0 < i \leqslant 2^{k-1}$. Olgu $i = p \cdot 2^j$, kus p on paaritu arv. Kui $p = 1$ ehk $i = 2^j$, siis H_k algusosa pikkusega i on parajasti H_j ja talle vahetult järgnev niisama pikk osa on $\overline{H_j}$, seega algusosa pikkusega i ei kordu. Vaatleme nüüd juhtu, kui $p > 1$. Kui jaotada huige H_k osadeks pikkusega 2^{j+1}, on igas osas kõik tähed peale viimase samad. Muuhulgas kordub huike H_k täht järjekorranumbriga 2^j edaspidi iga 2^{j+1} koha tagant. Et $p+2$ on paaritu, siis täht kohal $(p+2)\cdot 2^j$ langeb kokku tähega kohal 2^j, olles erinev tähest kohal 2^{j+1}. Kuid täht kohal $(p+2)\cdot 2^j$ huikes H_k on parajasti täht kohal 2^{j+1} huike selles osas, mis algab huike H_k kohalt $i+1$. Seega esimesest i tähest koosnev algusosa ei kordu talle vahetult järgneva osa algul.

Hindame nüüd $c(H_k)$ suurust. Olgu v_i tähevõrdluste arv i tähest koosneva algusosa kontrollimisel. Siis $v_i \geqslant \mathrm{SÜT}(i, 2^k)$, sest kui $i = p \cdot 2^j$, kus p on paaritu, siis esimesed $2^j - 1$ tähte algusosas pikkusega i ja talle vahetult järgnevas osas langevad kokku. Kui $0 \leqslant j < k-1$, siis täisarvude

$1, 2, 3, \ldots, 2^{k-1}$ seas on täpselt 2^{k-2-j} sellist arvu, mille suurim ühistegur arvuga 2^k on 2^j; lisaks on veel üks arv 2^{k-1}. Järelikult

$$
\begin{aligned}
c(H_k) &= v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_{2^{k-1}} \geqslant \\
&\geqslant 2^{k-2} \cdot 1 + 2^{k-3} \cdot 2 + 2^{k-4} \cdot 4 + \ldots + 2 \cdot 2^{k-3} + 1 \cdot 2^{k-2} + 2^{k-1} = \\
&= 2^{k-2} \cdot (k-1) + 2^{k-1} = \\
&= 2^{k-2} \cdot (k+1)\ .
\end{aligned}
$$

Seega $\dfrac{c(H_k)}{l(H_k)} \geqslant \dfrac{2^{k-2} \cdot (k+1)}{2^k} = \dfrac{k+1}{4}$.

Näeme, et $\dfrac{c(H_{400})}{l(H_{400})} \geqslant \dfrac{401}{4} > 100$. Seega ülesandes nõutud tingimustele vastav huige leidub.

Märkus. Hinnangus $\dfrac{c(H_k)}{l(H_k)} \geqslant \dfrac{k+1}{4}$ kehtib $k \geqslant 3$ korral tegelikult range võrratus: kuna huike H_k esimesed 4 tähte on HUHH, siis 3-tähelise algusosa kontrollimisel tehakse rohkem kui üks võrdlus (st $v_3 > 1 = \text{SÜT}(3, 2^n)$).

Hindamisskeemid

1. *(Terje Hõim)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Vale vastus ilma lahenduseta: 0 p
- Vastus õige, kuid ülesandest valesti aru saadud ja hoopis rühmas olevaid numbreid liidetud: 1 p
- Lahenduseks võetud õige suund, kuid eksitud rühmanumbri leidmisel ja vale vastus: 1 p
- Õigesti alustatud algebraline arutlus, kuid rühmanumbriga eksitud ja vale vastus: 2 p
- Vastus õige ja kaudselt selgitatud, kuid detailid puuduvad: 4 p
- Põhiliselt õige lahendus, eksitud vaid lõpus rühmanumbri leidmisel: 5 p
- Täielik lahendus: 7 p

2. *(Aleksei Lissitsin)*

Lahenduse allpool kirjeldatud osade eest antud punktid liideti.

- Leitud õige vastus: 4 p
- Tõestatud, et ainult see vastus sobib: 3 p

  Sealhulgas tüüpiliste puudulike tõestuste eest antud punktid:

  - Liidetavate numbrid määratakse vasakult paremale, kuid ei ole arvestatud ega välistatud võimalikud ülekanded (nt. väidetakse, et peab olema $333\ldots + 222\ldots = 555\ldots$, kuid pole selgitatud, miks ei saa olla $3325\ldots + 2225\ldots = 555\ldots$): *1 p*
  - Sarnane eelmisega, kuid enne määratakse mõned (kuid mitte kõik vajalikud) numbrid paremalt vasakule: *2 p*
  - Liidetavate numbrid määratakse vasakult paremale ning väidetakse ilma tõestuseta, et ülekandeid ei saa esineda: *2 p*

Tõestustes, kus määratakse numbrid paremalt vasakule (nagu žürii lahenduses) ei ole vaja ülekannete puudumist põhjendada, sest madalama järgu numbrid on juba eelnevalt määratud ja on ilmne, et nende summa ei ole 9-st suurem. Sellised tõestused said reeglina täispunktid.

Lihtne vastuse otsimise kirjeldus, kui see on tehtud õiges järjekorras, põhimõtteliselt ei erine tõestusest. Seega õige vastuse saanud lahendaja juba tegi suurema osa tööst (isegi siis, kui pole seda kirja pannud). Seetõttu anti selle ülesande korral õige vastuse eest nii palju punkte. Suurem osa lahendajatest said õige vastuse ka kätte.

3. *(Kairi Kangro)*

Lahenduse allpool kirjeldatud osade eest antud punktid liideti.

- Tõestatud väide vähima ühiskordse kohta: 4 p
- Tõestatud väide suurima ühisteguri kohta: 3 p

Punkte võeti maha põhjenduste ebaselguse või ebatäpsuste eest.

Paljud õpilased tegid läbi paar näidet konkreetsete arvudega ja siis väitsid, et järelikult väide kehtib kõigi arvude jaoks. Tihti väideti ka, et kuna arvude m ja n vähim ühiskordne jagub nii m kui n-ga, siis peab ta juba ise jaguma korrutisega mn.

4. *(Ivo Adermann)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Ekslike põhjendustega saadud õige lõppvastus: 1 p
- Mainitud, et latern tuleb paigutada 1008. posti otsa, ning põhjendatud, miks laternat mis tahes teise posti otsa asetades tuleks kauguste summa suurem, kuid arutluses on väiksemaid vigu: 4 p
- Täielik lahendus: 7 p

Väga paljudes töödes oli öeldud, et latern tuleks paigutada keskmise posti otsa, sest siis on kauguste summa väiksem kui siis, kui paigutada latern äärmise posti otsa. Sellest üksi ei saa aga järeldada, et keskmisele postile lähenedes postide kauguste summa laternast kogu aeg väheneb, ehk et kauguste summa ei saa olla vähim mõne vahepealse posti korral.

5. *(Kaur Aare Saar)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Tehtud ainult joonis või vaadatud läbi erijuhte: 0 p
- Leidub mõni üksik kasulik tähelepanek või lahendusidee, kuid neist edasi pole mindud: 1 p
- Pandud tähele, et $\angle ACA' = \angle ABA' = 90^\circ$: 2 p
- Näidatud ühe vastasnurkade paari võrdsus: 4 p
- Näidatud, et $A'C \parallel BH$, või mõni muu seos, millele analoogiat rakendades saab lahenduse lõpuni viia: 5 p
- Põhiliselt täielik lahendus üksikute puudustega: 6 p
- Täielik lahendus: 7 p

Mitmetes lahendustes näidati lühidalt ja konkreetselt, et $A'C \parallel BH$, kuid selle asemel, et teine pool teha analoogselt, jäeti see üldse tegemata või mindi seal suure ringiga.

6. *(Urve Kangro)*

Lahenduse allpool kirjeldatud osade eest antud punktid liideti.

Žürii lahendusega sarnase lahenduse korral:

- Näidatud sobiv värvimine juhul $m = 2$: 1 p
- Näidatud, et 4×6 ruudustikku saab niiviisi värvida: 2 p
- Näidatud, et 3×7 ruudustikku ei saa niiviisi värvida: 2 p
- Lahendus lõpule viidud: 2 p

Lahenduse korral, kus juhte $m = 3$ ja $m = 4$ vaadeldi eraldi:

- Näidatud sobiv värvimine juhul $m = 2$: 1 p
- Näidatud, et 3×6 ruudustikku saab niiviisi värvida: 1 p
- Näidatud, et 3×7 ruudustikku ei saa niiviisi värvida: 2 p
- Näidatud, et 4×6 ruudustikku saab niiviisi värvida: 2 p
- Näidatud, et 4×7 ruudustikku ei saa niiviisi värvida: 1 p

Ainult vastuse eest punkte ei saanud, tuli ka selgitada või näidata joonisel, kuidas on võimalik ruudustikku vastavalt ülesande tingimustele värvida. Tüüpiliselt olid võimalikud värvimised lahenduses olemas, aga hätta jäädi põhjendamisel, et suuremat ruudustikku ei saa nõutaval moel värvida. Tihti piirduti lihtsalt väitega, et see pole võimalik, või siis värviti mingi algoritmi järgi algus ära ja seejärel näidati, et enam veerge lisada ei saa. Kasulike tähelepanekute eest näitamisel, et suuremat ruudustikku ei saa niimoodi värvida, sai üldiselt 1–2 punkti. Millegipärast aga paljud õpilased piirdusid ka juhtudel $m = 3$ ja $m = 4$ ainult malelaua tüüpi värvimisega.

Matemaatika lahtine võistlus

7. detsember 2014 **Vanem rühm**

Hindamisskeemid

1. *(Erik Paemurru)*

Lahenduse allpool kirjeldatud osade eest antud punktid liideti.

- a)-osa (leitud sobiv arv x): 3 p
- b)-osa (leitud sobiv arv x): 4 p

Õpilased, kes tegid katsetusi teguriteks jaotamisega, jõudsid tihti õige vastuseni. Seevastu need, kes rakendasid ruutvõrrandi lahendivalemit, ei jõudnud enamasti kuskile.

Osa a) osutus õpilastele lihtsamaks, sest sobiva arvu $x = 1007 = \frac{2014}{2}$ võis lihtsalt ära arvata.

2. *(Ahti Peder)*

Lahenduse allpool kirjeldatud osade eest antud punktid liideti.

- Lahendite leidmine: 5 p
- Leitud lahendite kontroll: 2 p

Paljudes lahendustes piirduti lahendite leidmisega, jättes kontrollimata, kas võis tekkida võõrlahendeid. Täispunktide saamiseks pidi lahendite kontrollile olema vähemalt viidatud.

3. *(Oleg Košik)*

Esitame hindamisskeemid kahe erineva lahendusviisi jaoks. Kummalgi juhul lahenduse kirjeldatud osade ees antud punktid liideti (aga ainult ühe skeemi piires).

Lahendus ristsummade uurimise teel (nagu žürii lahenduses):

- Leitud õige vastus: 1 p
- Tähele pandud, et *fikseeritud* ristsumma korral on jagatis vähim, kui arvu viimased numbrid on võimalikult suured ja esimesed võimalikult väikesed: 2 p
- Läbi vaadatud sellised arvud ristsummade 1 kuni 36 korral: 4 p

Lahendus üksikute numbrite uurimise teel:

- Leitud õige vastus: 1 p
- Tõestatud, et jagatis on vähim, kui viimane number on 9: 1 p
- Tõestatud, et jagatis on vähim, kui esimene number on 1: 2 p

- Tõestatud, et kolmas number peab olema 9 ja teine number 0: 3 p

Mõni lahendaja väitis, et neljakohalise arvu jagatis oma ristsummaga alati kasvab, kui suurendada sajaliste arvu. See väide ei vasta alati tõele, kui vaadata näiteks arve 1100 ja 1200.

Mõned eeldasid ekslikult, et vaadeldav jagatis peab olema täisarv. Kuna ülesande tekstis ei ole selle kohta midagi öeldud, siis sellist eeldust teha ei saa.

4. *(Mark Gimbutas)*

Lahenduse allpool kirjeldatud osade eest antud punktid liideti.

- Valitud $x = 0$ ja järeldatud, et $f(f(y)) = 2f(0)$ iga y korral: 2 p
- Näidatud, et f on konstantne: 4 p

  Sealhulgas:
  - Valitud $x = 1$ ja järeldatud sellest f konstantsus nagu lahenduses 1: *4 p*

    või
  - Valitud $y = 0$ või $x = y$: *1 p*
  - Eelnevast järeldatud, et $f(x^2) = f(0)$ iga x korral: *1 p*
  - Järeldatud sellest f konstantsus nagu lahenduses 3 või 4: *2 p*
- Konstantsete funktsioonide seast leitud õige vastus: 1 p

Ülesande lahendamiseks oli tarvis teha mitmeid kavalaid argumentide valikuid ja nendest valikutest ka õigeid järeldusi. Mitmed õpilased jõudsid tõdemuseni, et $f(f(y)) = 2f(0)$ iga arvu y puhul ehk $f(f(y))$ on konstantne. Neli õpilast järeldasid otse sellest, et ka $f(y)$ peab siis konstantne olema. See ei ole aga üldjuhul tõsi: $f(f(y))$ oleks konstantne ka näiteks siis, kui $f(0) = 1$ ja $f(y) = 2$ iga $y \neq 0$ korral.

Lahenduseks pakuti ka kindlate, konkreetsel kujul funktsioonide läbiproovimist — niiviisi jõuti küll enamasti õige vastuseni, kuid jällegi, väga palju funktsioone jääb nii läbi vaatamata.

5. *(Laur Tooming)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- On avaldatud kõrgustega seotud nurki kolmnurga K_1 nurkade kaudu, kaugemale pole jõutud: 1 p
- Täielik lahendus, kuid ainult teravnurkse kolmnurga K_1 korral: 4 p
- Täielik lahendus terav- ja nürinurkse kolmnurga K_1 korral: 7 p

Ülaltooduga võrreldes anti 1–2 punkti vähem, kui polnud täielikult läbi vaadatud kolmnurga K_2 nurkade kõikvõimalikke vastavusi kolmnurga K_1 nurkadega.

6. *(Härmel Nestra)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Lahenduseni jõudmise seisukohast kasutud konstruktsioonid ja mõttekäigud: 0 p
- Esitatud konstruktsiooniidee, mida järgides on võimalik leida ülesande tingimusi rahuldav huige: 1 p

Üheski töös polnud midagi lahenduseni jõudmise seisukohast kasulikku tõestatud, kuid 5 töös esines töötav idee koostada järjest uusi huikeid olemasoleva algusosa kordamise ja viimase tähe muutmise teel ning veel 1 töös oli toodud natuke keerulisem konstruktsiooniidee, mis samuti viiks sihile.

Osa õpilasi oli mõnest tingimusest valesti aru saanud või mõnda tingimust ignoreerinud. Kõige sagedamini ignoreeriti tingimust, mille kohaselt võrdleb pealik kindla pikkusega algusosa tähti järgneva osa tähtedega ainult kuni esimese erinevuse avastamiseni. Selle asemel eeldati, et algusosa pikkusega k kontrollimiseks kulub alati k tähevõrdlust, ja saadi võrdluste arvudest aritmeetiline jada, mis kasvab kiiresti 100 korda suuremaks huike pikkusest. Et õige vastus saadi siin täiesti ebakorrektse põhjendusega, ei teeninud sellised tööd punkte.