Lõppvoor 2013

Eesti LX matemaatikaolümpiaad

6. aprill 2013 | Lõppvoor | **9. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik mittenegatiivsed täisarvud n, mille korral $n - \sqrt{n}$ on mingi täisarvu ruut.

2. Lahenda võrrand

$$\frac{x-1}{\frac{x}{x+1}} = \frac{\frac{x-1}{x}}{x+1}.$$

3. Vaatleme kuusnurki, mille kõik sisenurgad on ühesuurused.

a) Tõesta, et iga sellise kuusnurga mistahes kahe naaberkülje pikkuste summa on võrdne nende vastas asuvate külgede pikkuste summaga.

b) Kas leidub sellise omadusega kuusnurk, mille külgede pikkused mingis järjekorras võetuna on 1, 2, 3, 4, 5 ja 6?

4. Kaks last mängivad trips-traps-trulli muudetud reeglitega. Igal käigul võib kumbki mängija joonistada 3×3 tabeli mõnesse tühja lahtrisse omal valikul kas risti või nulli. Käiakse kordamööda ja võidab see, kelle käigu tulemusena saab tabeli mõni rida, veerg või vastasnurki ühendav diagonaal täidetud kolme ühesuguse märgiga. Kas ühel mängijatest on võimalik võita vastase suvalise vastumängu korral ja kui jah, siis kummal?

5. Korrapärase 2013-nurga tippudes paiknevad tühjad veeämbrid. Õpetaja palub Jukul täita mõned ämbrid veega nii, et iga ämber, mille jaoks leidub kaks temast võrdsel kaugusel asuvat täis veeämbrit, oleks samuti täis. Leia vähim ämbrite arv, mille Juku peab täitma, kui õpetaja palub tal täita

a) vähemalt 2 ämbrit;

b) vähemalt 100 ämbrit.

Eesti LX matemaatikaolümpiaad

6. aprill 2013 Lõppvoor **10. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Kas arvu 2013 saab esitada kahe täisarvu kuupide vahena?

2. Kas hulkliiget $x^4 + x^2 + 1$ saab esitada korrutisena hulkliikmetest, kus muutuja x astendaja on väiksem kui 4 ja kõik kordajad on reaalarvud?

3. Trapetsi $ABCD$ alused on AB ja CD ning diagonaalide lõikepunkt on P. Tõesta, et kui $\frac{|PA|}{|PD|} = \frac{|PB|}{|PC|}$, siis trapets $ABCD$ on võrdhaarne.

4. Ruudustikus mõõtmetega 5×5 on iga ühikruut värvitud kas siniseks või kollaseks. Tõesta, et leidub ruudustiku äärtega paralleelsete külgedega ristkülik, mille nurkades paiknevad neli ühikruutu on ühte värvi.

5. Jüri joonistab paberile ringjoone c raadiusega 3 ning n ringjoont raadiusega 1. Leia vähim n, mille korral Jüri saab ringjooned paigutada nii, et joonisele poleks enam võimalik lisada ringjooni raadiusega 1, mis asuksid ringjoone c sees ja millel oleks iga Jüri joonistatud ringjoonega ülimalt üks ühine punkt.

Eesti LX matemaatikaolümpiaad

6. aprill 2013 Lõppvoor **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. On antud mingi lõplik kümnendmurd. Juku hakkab selle murru lõppu numbreid ühekaupa juurde kirjutama, nii et igal sammul lisatav number on kõigi selleks hetkeks olemasolevate numbrite summa 10-ga jagamisel tekkiv jääk. (Näiteks kui algne murd on 27,35, siis lõppu lisatavad numbrid on 7, 4, 8 jne.)

Tõesta, et niiviisi saadav lõpmatu kümnendmurd esitab ratsionaalarvu.

2. Olgu $n > 1$ täisarv ja $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reaalarvud, mille summa on 0 ja absoluutväärtuste summa on 1. Tõesta, et

$$|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n| \leqslant \frac{n-1}{2}.$$

3. Tasandil on antud kumer nelinurk $ABCD$, milles $\angle DAB + \angle ABC < 180^\circ$. Olgu E selline nelinurga tippudest erinev punkt lõigul AB, et kolmnurkade AED ja BEC ümberringjooned lõikuvad nelinurga $ABCD$ sees punktis F. Punkt G võetakse nii, et $\angle DCG = \angle DAB$, $\angle CDG = \angle ABC$ ja kolmnurk CDG asub väljaspool nelinurka $ABCD$. Tõesta, et punktid E, F, G on ühel sirgel.

4. Tabelis mõõtmetega $(2k+1) \times (2k+1)$, kus k on positiivne täisarv, on igasse lahtrisse kirjutatud üks reaalarv, kusjuures kõik need arvud on erinevad. Iga rea järele kirjutatakse selle rea *mediaan*, st selles reas esinev arv, millest väiksemaid ja suuremaid arve on selles reas ühepalju. Olgu m tekkinud lisaveeru mediaan. Tõesta, et rohkem kui veerand esialgsetest arvudest on väiksemad kui m.

5. Milliste naturaalarvude $n \geqslant 3$ korral saab korrapärase n-nurga tükeldada väiksemateks korrapärasteks hulknurkadeks? (Erinevad tükid võivad olla erineva külgede arvuga.)

Eesti LX matemaatikaolümpiaad

6. aprill 2013 Lõppvoor **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia vähim naturaalarv n, mille korral leiduvad sellised täisarvud $a_1, \ldots, a_n$ (mis ei pea olema erinevad), et $a_1^4 + \ldots + a_n^4 = 2013$.

2. Reaalarvud x_1, x_2, x_3, x_4 lõigult $[0; 1]$ on sellised, et korrutis

$$K = |x_1 - x_2| \cdot |x_1 - x_3| \cdot |x_1 - x_4| \cdot |x_2 - x_3| \cdot |x_2 - x_4| \cdot |x_3 - x_4|$$

on võimalikult suur. Tõesta, et

$$\frac{1}{27} > K > \frac{4}{243}\,.$$

3. Kolmnurga $C_1C_2C_3$ külgede C_2C_3, C_3C_1 ja C_1C_2 keskpunktid on vastavalt K_1, K_2 ja K_3. Ringjoonte c_1, c_2 ja c_3 keskpunktid on vastavalt C_1, C_2 ja C_3, ringjoonte k_1, k_2, k_3 keskpunktid aga vastavalt K_1, K_2 ja K_3. Ükski kaks antud kuuest ringjoonest ei lõiku kahes punktis ega asu üksteise sees. Ringjooned k_1, k_2 ja k_3 puutuvad üksteist väliselt.

a) Tõesta, et ringjoonte c_1, c_2 ja c_3 raadiuste summa on ülimalt veerand kolmnurga $C_1C_2C_3$ ümbermõõdust.

b) Tõesta, et kui ringjoonte c_1, c_2 ja c_3 raadiuste summa võrdub veerandiga kolmnurga $C_1C_2C_3$ ümbermõõdust, siis kolmnurk $C_1C_2C_3$ on võrdkülgne.

4. *Maagiliseks ruuduks* nimetame 3×3 ruudustikku, mille ruutudesse on kirjutatud kõik naturaalarvud 1 kuni 9 nii, et igas ruudus on üks arv ning kõigis ridades ja veergudes on arvude summad võrdsed.

Tõesta, et mistahes kaks maagilist ruutu on teineteisest saadavad järgmiste teisenduste abil: ridade järjekorra vahetamine, veergude järjekorra vahetamine, ruudu pööramine, ruudu peegeldamine diagonaali suhtes.

5. a) Matemaatika huviringis palub õpetaja Jüril mõelda mingi positiivne paaritu täisarv n ning kirjutada tahvlile mingi täisarvuliste liikmetega aritmeetilise jada n järjestikust liiget õiges järjestuses, Maril aga palub ta otsustada, kas kõigi Jüri kirjutatavate arvude kogusumma jagub n-ga. Jüri tahvli juurde minnes on mõlemal õpilasel mõlemale antud ülesanded teada. Kui ruttu on Maril võimalik vastata?

b) Sama küsimus, kui n on paaris.

LX Олимпиада Эстонии по математике

6 апреля 2013 г. Заключительный тур **9 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все неотрицательные целые числа n, при которых $n-\sqrt{n}$ является квадратом некоторого целого числа.

2. Решить уравнение
$$\frac{x-1}{\frac{x}{x+1}}=\frac{\frac{x-1}{x}}{x+1}\,.$$

3. Рассмотрим шестиугольники, у которых все внутренние углы равны между собой.

а) Доказать, что в таком шестиугольнике сумма длин любых двух соседних сторон равна сумме длин сторон, расположенных напротив них.

б) Найдётся ли такой шестиугольник, длины сторон которого, взятые в некотором порядке, равны 1, 2, 3, 4, 5 и 6?

4. Двое детей играют в крестики-нолики по изменённым правилам. Каждым ходом игрок может нарисовать в пустую клетку таблицы 3×3 на своё усмотрение крестик или нолик. Ходят по очереди, и выигрывает тот, после хода которого какая-то строка, столбец или большая диагональ таблицы окажутся заполненными тремя одинаковыми символами. Может ли какой-то игрок победить при любой ответной игре соперника, и если да, то какой?

5. В вершинах правильного 2013-угольника распологаются пустые вёдра. Учитель просит Юру наполнить некоторые вёдра водой так, чтобы каждое ведро, для которого найдутся два наполненных ведра на одинаковом расстоянии от него, было также наполненным. Найти наименьшее число вёдер, которое Юра должен наполнить водой, если учитель просит его наполнить

а) не меньше 2 вёдер;

б) не меньше 100 вёдер.

LX Олимпиада Эстонии по математике

6 апреля 2013 г. Заключительный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Можно ли представить число 2013 как разность кубов двух целых чисел?

2. Можно ли представить многочлен $x^4 + x^2 + 1$ как произведение многочленов, степень переменной x в каждом из которых меньше 4, а все коэффициенты – действительные числа?

3. Пусть AB и CD – основания трапеции $ABCD$, диагонали которой пересекаются в точке P. Доказать, что если $\frac{|PA|}{|PD|} = \frac{|PB|}{|PC|}$, то трапеция $ABCD$ равнобедренна.

4. В таблице размером 5×5 клеток каждая клетка раскрашена либо в синий, либо в жёлтый цвет. Доказать, что найдётся такой прямоугольник со сторонами параллельными краям таблицы, что четыре клетки, расположенные в его углах, окажутся одного цвета.

5. Женя чертит на бумаге окружность c радиусом 3, а также n окружностей радиусом 1. Найти наименьшее n, при котором Женя может расположить окружности так, что на рисунок больше невозможно будет добавить окружность радиусом 1, которая находилась бы внутри окружности c и у которой было бы не более одной общей точки с каждой из начерченных Женей окружностей.

LX Олимпиада Эстонии по математике

6 апреля 2013 г. Заключительный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Дана конечная десятичная дробь. Вася записывает в конец этой дроби по одной цифре так, что цифра, добавляемая на каждом шагу, равна остатку от деления суммы всех имеющихся на данных момент цифр на 10. (Например, если вначале дана дробь 27,35, то добавляемые в конец цифры будут 7, 4, 8 и т.д.)

Доказать, что полученная таким образом бесконечная десятичная дробь является представлением рационального числа.

2. Пусть $n > 1$ целое число, а $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – действительные числа, сумма которых равна 0, а сумма модулей которых равна 1. Доказать, что

$$|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n| \leqslant \frac{n-1}{2}\,.$$

3. На плоскости задан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle DAB + \angle ABC < 180^\circ$. Пусть E – такая отличная от вершин этого четырёхугольника точка на отрезке AB, что описанные окружности треугольников AED и BEC пересекаются внутри четырёхугольника $ABCD$ в точке F. Возьмём точку G так, чтобы $\angle DCG = \angle DAB$, $\angle CDG = \angle ABC$, а треугольник CDG оказался снаружи четырёхугольника $ABCD$. Доказать, что точки E, F, G лежат на одной прямой.

4. В таблице размером $(2k + 1) \times (2k + 1)$ клеток, где k – положительное целое число, в каждую клетку записано одно действительное число, причём все эти числа различны. В конец каждой строки записывают *медиану* этой строки, т.е. такое число из этой строки, чисел больше которого и чисел меньше которого в этой строке одинаковое количество. Пусть m будет медианой полученного таким образом дополнительного столбца. Доказать, что больше четверти изначальных чисел были меньше, чем m.

5. При каких натуральных числах $n \geqslant 3$ возможно разбить правильный n-угольник на меньшие правильные многоугольники? (Различные кусочки могут иметь различное количество сторон.)

LX Олимпиада Эстонии по математике

6 апреля 2013 г. Заключительный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти наименьшее натуральное число n, при котором найдутся такие целые числа $a_1, \ldots, a_n$ (не обязательно различные), что $a_1^4 + \ldots + a_n^4 = 2013$.

2. Действительные числа x_1, x_2, x_3, x_4 из отрезка $[0; 1]$ таковы, что произведение $K = |x_1 - x_2| \cdot |x_1 - x_3| \cdot |x_1 - x_4| \cdot |x_2 - x_3| \cdot |x_2 - x_4| \cdot |x_3 - x_4|$ является как можно большим. Доказать, что

$$\frac{1}{27} > K > \frac{4}{243}\,.$$

3. В треугольнике $C_1C_2C_3$ точки K_1, K_2 и K_3 являются серединами соответственно сторон C_2C_3, C_3C_1 и C_1C_2. Центры окружностей c_1, c_2 и c_3 – соответсвенно C_1, C_2 и C_3, а центры окружностей k_1, k_2, k_3 – соответственно K_1, K_2 и K_3. Никакие две из этих шести окружностей не пересекаются в двух точках и не находятся одна внутри другой. Окружности k_1, k_2 и k_3 касаются друг друга внешне.

а) Доказать, что сумма радиусов окружностей c_1, c_2 и c_3 не превосходит четверти периметра треугольника $C_1C_2C_3$.

б) Доказать, что если сумма радиусов окружностей c_1, c_2 и c_3 равняется четверти периметра треугольника $C_1C_2C_3$, то треугольник $C_1C_2C_3$ равносторонний.

4. Назовём *магическим квадратом* таблицу 3×3, в клетках которой записаны все натуральные числа от 1 до 9 так, что в каждой клетке записано одно число, и суммы чисел во всех строках и столбцах равны.

Доказать, что из любого магического квадрата можно получить любой другой магический квадрат при помощи следующих преобразований: изменение порядка строк, изменение порядка столбцов, поворот квадрата, зеркальное отражение квадрата в отношении диагонали.

5. а) Руководитель математического кружка просит Сашу задумать какое-либо положительное нечётное целое число n и записать на доске в правильном порядке n идущих подряд членов какой-либо целочисленной арифметической прогрессии. А Машу он просит решить, верно ли, что сумма всех чисел, которые Саша запишет на доску, будет делиться на n. Когда Саша идёт к доске, обоим ученикам известны задания друг друга. В какой момент Маша сможет ответить?

б) Тот же вопрос, если n чётное.

Lahendused

1. *Vastus:* 0 ja 1.

Olgu $n - \sqrt{n}$ mingi täisarvu ruut. Siis $n - \sqrt{n}$ on täisarv, mistõttu $\sqrt{n}$ on täisarv. Olgu $\sqrt{n} = m$, siis ülesande tingimuse järgi $m^2 - m$ on mingi täisarvu ruut. Kui nüüd $m > 1$, siis

$$m^2 - m > m^2 - m - (m - 1) = m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2\ ;$$

samas ilmselt $m^2 - m < m^2$. Seega kui $m > 1$, siis $m^2 - m$ asub suuruselt kahe järjestikuse täisarvu $m - 1$ ja m ruutude vahel ja ei saa seetõttu olla täisarvu ruut.

Jäävad üle variandid $m = 1$ ja $m = 0$, kust vastavalt $n = 1$ või $n = 0$. Mõlema puhul $n - \sqrt{n} = 0$ ja see on tõepoolest täisarvu ruut.

2. *Vastus:* $x = -2$ ja $x = 1$.

Nimetajatega läbikorrutamisel ja lihtsustamisel saame võrrandi

$$(x - 1)(x + 1) = \frac{x - 1}{x + 1}.$$

See võrrand on rahuldatud, kui $x - 1 = 0$ — siit saame lahendi $x = 1$. Juhul $x - 1 \neq 0$ taandub see võrrand kujule

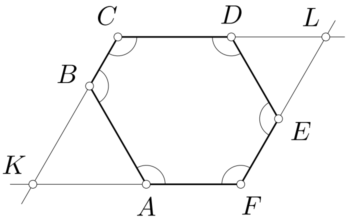
$$x + 1 = \frac{1}{x + 1},$$

mis on rahuldatud, kui $x + 1 = 1$ või $x + 1 = -1$. Esimese variandi puhul oleks $x = 0$, mis ei sobi, sest algses võrrandis esineb x nimetajas. Teine juht annab $x = -2$, mis sobib.

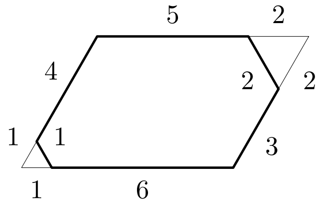
3. *Vastus:* b) jah.

Lahendus 1.

a) Olgu ülesandes antud kuusnurk $ABCDEF$. Ülesande lahendamiseks piisab näidata võrdus $|AB| + |BC| = |DE| + |EF|$, kuna teiste nõutud võrduste järeldamiseks võib kuusnurga tipud ümber nimetada.



Joonis 1



Joonis 2

Lõikugu kiired FA ja CB punktis K ning kiired FE ja CD punktis L (joonis 1). Kuusnurga $ABCDEF$ sisenurgad on suurusega $\frac{(6-2)\cdot 180^\circ}{6}$ ehk 120° ning välisnurgad niisiis suurusega $180^\circ - 120^\circ$ ehk 60°, mistõttu kolmnurgad KAB ja LDE on võrdkülgsed. Nelinurk $FKCL$ on aga rööpkülik, sest tema vastasküljed on paralleelsed. Sellest järeldub $|KC| = |LF|$ ehk $|KB| + |BC| = |LE| + |EF|$, mis $|KB| = |AB|$ ja $|LE| = |DE|$ tõttu annabki vajaliku võrduse $|AB| + |BC| = |DE| + |EF|$.

b) Lõigates rööpkülikul, mille nurgad on suurustega 60° ja 120° ning küljepikkused 7 ja 5, teravnurkade juurest maha võrdkülgsed kolmnurgad küljepikkustega vastavalt 1 ja 2, saame kuusnurga, mille kõik nurgad on suurusega 120° ja küljepikkused on 1, 4, 5, 2, 3, 6 (joonis 2).

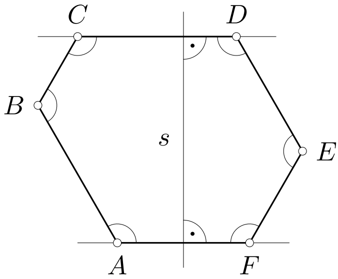
Lahendus 2.

a) Olgu ülesandes antud kuusnurk $ABCDEF$. Sümmeetria põhjal piisab näidata võrdus $|AB| + |BC| = |DE| + |EF|$. Nagu lahenduses 1 leiame kuusnurga $ABCDEF$ külgede vaheliste välisnurkade suuruse 60°. Kuusnurga $ABCDEF$ vastasküljed on paralleelsed, sest nende vahel on täpselt kolm välisnurka.

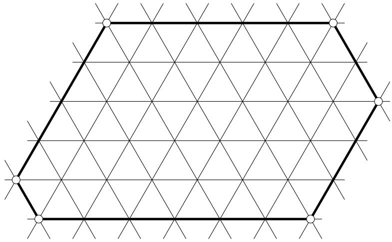
Vaatleme vastaskülgedega CD ja FA ristuvat sirget s (joonis 3); et kõik ülejäänud küljed moodustavad selle sirgega ühesuuruse nurga 30°, siis nende külgede pikkused on võrdelised nende projektsioonide pikkustega sirgele s. Külgede AB ja BC projektsioonide pikkuste summa on aga võrdne paralleelsete sirgete CD ja FA vahelise kaugusega ning sama kehtib ka nende vastas asuvate külgede DE ja EF kohta. Seega on külgede AB ja BC ning DE ja EF projektsioonide pikkuste summad võrdsed, ning järelikult on võrdsed ka nende külgede endi pikkuste summad.

b) Joonisel 4 kujutatud kuusnurga tipud asuvad küljepikkusega 1 võrdkülgsetest kolmnurkadest moodustatud võre sõlmedes. Ilmselt on selle kuusnurga sisenurgad kõik võrdsed ning tema külgede pikkused on 1, 4, 5, 2, 3 ja 6.

Lahendus 3. Vaatleme kaht liiki teisendusi, mis säilitavad kuusnurga omaduse, et tema sisenurgad on ühesuurused.



Joonis 3



Joonis 4

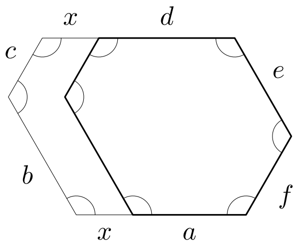
(1) Kahe vastaskülje pikendamine või lühendamine mingi ühe ja sama suuruse x võrra (joonis 5) — sellega muutuvad kuusnurga külgede pikkused vastavalt šabloonile

$$(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f) \longleftrightarrow (a{+}x,\ b,\ c,\ d{+}x,\ e,\ f)\ .$$

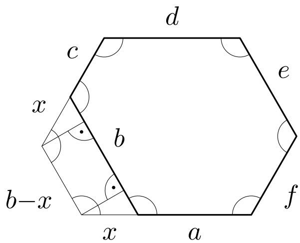
(2) Mistahes ühe külje mõlema naaberkülje pikendamine või lühendamine ühe ja sama suuruse x võrra (joonis 6) — sellega muutuvad kuusnurga külgede pikkused vastavalt šabloonile

$$(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f) \longleftrightarrow (a{+}x,\ b{-}x,\ c{+}x,\ d,\ e,\ f)\ .$$

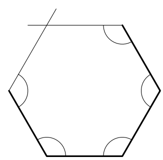
On lihtne kontrollida, et mõlemad teisendused säilitavad tõestatava omaduse, ükskõik kummas suunas seda teisendust on rakendatud. Teisi sõnu, kui algses kuusnurgas on mistahes kahe naaberkülje pikkuste summa võrdne nende vastas asuvate külgede pikkuste summaga, siis kehtib see ka teisendusel saadava kuusnurga kohta, ja vastupidi.



Joonis 5



Joonis 6



Joonis 7

a) Kuna korrapärane kuusnurk on nõutava omadusega ja vaadeldavad teisendused säilitavad selle omaduse kummaski suunas, siis piisab näidata, et mistahes sellise kuusnurga, mille kõik sisenurgad on ühesuurused, saab nende teisenduste abil viia korrapäraseks kuusnurgaks.

Tõepoolest, olgu sellise kuusnurga külgede pikkused (a, b, c, d, e, f). Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $d \geqslant a$ ja $f \geqslant c$, sest külgede tähistusi vajadusel tsükliliselt nihutades saame seda alati tagada. Valides nüüd arvu s nii, et $s \geqslant \max(a, b, c)$, ja rakendades kolm korda teisendust (1), saame antud kuusnurga viia kuusnurgaks, mille kolm järjestikust külge on pikkusega s:

$$\begin{aligned}(a, b, c, d, e, f) &\xrightarrow{(1)} (s, b, c, d', e, f)\\ &\xrightarrow{(1)} (s, s, c, d', e', f)\\ &\xrightarrow{(1)} (s, s, s, d', e', f')\,.\end{aligned}$$

Vastavalt tehtud eeldusele on siin $d' \geqslant s$ ja $f' \geqslant s$. Üldisust kitsendamata olgu $d' \leqslant f'$, siis saame teha teisenduse

$$(s, s, s, d', e', f') \xrightarrow{(2)} (s, s, s, s, e'', f'')\,.$$

Kuusnurk, mille kõik sisenurgad on ühesuurused ja neli järjestikust külge on võrdse pikkusega, on aga korrapärane (joonis 7).

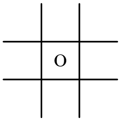
b) Sellise kuusnurga saame korrapärasest kuusnurgast küljepikkusega 1 järgmiste teisendustega:

$$\begin{aligned}(1, 1, 1, 1, 1, 1) &\xrightarrow{(1)} (1, 4, 1, 1, 4, 1)\\ &\xrightarrow{(1)} (1, 4, 5, 1, 4, 5)\\ &\xrightarrow{(2)} (1, 4, 5, 2, 3, 6)\,.\end{aligned}$$

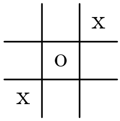
4. *Vastus:* jah, alustajal.

Joonistagu alustaja oma avakäigul ruudustiku keskele nulli (joonis 8). Kui seejärel joonistab vastane kuhugi nulli, siis saab alustaja kohe võita, joonistades täpselt vastassuunda samuti nulli. Oletame seetõttu, et vastane teeb oma esimesel käigul risti. Vaatleme kahte juhtu sõltuvalt risti asukohast.

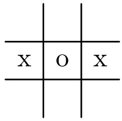
- Kui alustaja vastane joonistab risti nurka, siis alustaja joonistab risti vastasnurka (joonis 9). Ükskõik mida teine mängija nüüd ka ei käiks, saab esimene mängija oma järgmisel käigul võita.
- Kui alustaja vastane joonistab risti serva keskele, siis alustaja joonistab risti selle vastasserva keskele (joonis 10). Nüüd
  - kui teine mängija käib nurka, siis esimene mängija võidab kohe;
  - kui teine mängija teeb nulli serva keskele, siis samuti esimene mängija võidab kohe;
  - kui teine mängija teeb risti serva keskele, siis esimene mängija teeb risti viimase vaba serva keskele (joonis 11), misjärel teine mängija on sunnitud käima nurka ja esimene mängija võidab.



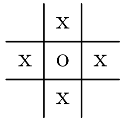
Joonis 8



Joonis 9



Joonis 10



Joonis 11

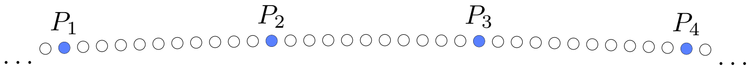
Märkus. Kirjeldatud strateegia alustaja jaoks saab kokku võtta lihtsamas vormis: esimene märk tuleb panna ruudustiku keskele ning edaspidi tuleb teha võidukäik, niipea kui selleks on võimalus, muidu aga teha vastase käiguga sümmeetriline käik ruudustiku keskpunkti suhtes.

Ka võitvuse põhjenduse saab rajada sellele üldisele kirjeldusele. Oletame, et hoopis alustaja vastane võidab. Et ruudustiku keskmine ruut on hõivatud, peab võidukäik olema tehtud nurka või serva keskele. Vastavalt kirjeldatud strateegiale on enne alustaja vastase käiku seis laua keskpunkti suhtes sümmeetriline. Järelikult on lõppseisus alustaja vastase võidukäiguga sümmeetriline ruut tühi, mis tähendab, et kolm ühesugust märki tuleb kokku piki äärt. Selles ääres pidi enne alustaja vastase viimast käiku olema kaks ruutu juba täis ning sümmetria tõttu pidi ka kahel ruudul vastasääres olema samad märgid. Neist neljast ruudust kolm pidid olema täidetud juba enne alustaja viimast käiku. Et neist kaks pidid olema ühel joonel, oleks alustaja saanud oma viimasel käigul võita.

5. *Vastus:* a) 3; b) 183.

a) Kui Juku täidab 2 ämbrit, siis on tühje ämbreid 2011, mis on paaritu arv. Järelikult kas ühel või teisel 2013-nurga ümberringjoone kaarel, mis jääb täidetud ämbrite vahele, on paaritu arv tühje ämbreid. Neist keskmine ämber asub täidetud ämbritest võrdsel kaugusel. Seega peab Juku täitma vähemalt 3 ämbrit. Teisest küljest, kuna $2013 = 3 \cdot 671$, on Jukul võimalik täita 3 ämbrit nii, et iga kahe täidetud ämbri vahele jääb täpselt 670 ämbrit. Tulemus ilmselt rahuldab ülesande tingimusi.

b) Olgu ämbrid nõutaval viisil täidetud. Näitame, et täis ämbrid paiknevad korrapäraselt, st iga kahe järjestikuse täis ämbri vahele jääb ühesugune arv tühje ämbreid. Selleks valime suvalised täis ämbrid P_1, P_2, P_3 nii, et P_1 ja P_2 vahel ega P_2 ja P_3 vahel pole ühtki täis ämbrit (joonisel 12 on täis ämbrid kujutatud sinisega). Siis P_1 ja P_2 vahele jääb paarisarv tühje ämbreid ning P_2 ja P_3 vahele samuti paarisarv tühje ämbreid. Seega P_1 ja P_3 vahele jääb üle P_2 liikudes koos ämbriga P_2 paaritu arv ämbreid. Neist keskmine peab ülesande tingimuse põhjal olema täis, aga kuna ainult P_2 on selles vahemikus täis, peab just P_2 olema keskmine. Järelikult P_1 ja P_2 vahel ning P_2 ja P_3 vahel on ühesugune arv ämbreid. Vaadeldes analoogselt ämbreid P_2, P_3, P_4, kus P_4 on ümberringjoonel P_3-le järgnev täis ämber, leiame, et ka P_3 ja



Joonis 12

P_4 vahel on sama arv tühje ämbreid, jne. Kokkuvõttes saamegi, et täis ämbrid paiknevad võrdsete vahemaade tagant.

Kui täis ämbrite arv on n ja järjestikuste tühjade ämbrite arv nende vahel k, siis $n \cdot (k+1) = 2013$, seega täis ämbrite arv n on arvu 2013 tegur. Kuna $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ ning 3, 11 ja 61 on algarvud, siis 2013 tegurid on

$$1\,, \quad 3\,, \quad 11\,, \quad 61\,, \quad 3 \cdot 11 = 33\,, \quad 3 \cdot 61 = 183\,, \quad 11 \cdot 61 = 671\,, \quad 2013\,.$$

Vähim tegur, mis on vähemalt 100, on 183. Seega tuleb täita vähemalt 183 ämbrit.

Näitame, et konstruktsioon 183 korrapäraselt paikneva täis ämbriga rahuldab tingimusi. Järjestikuste täis ämbrite vahele jääb 11 – 1 ehk 10 tühja ämbrit, mistõttu iga kahe täis ämbri vahele jääb kokku paarisarv tühje ämbreid. Seega alati, kui kahe täis ämbri vahele jäävaid ämbreid on paaritu arv, peab nende vahele jääma paaritu arv täis ämbreid. Seega nende vahele jäävatest ämbritest keskmine on täis.

Lahendused

1. *Vastus:* ei.

Lahendus 1. Oletame, et $2013 = x^3 - y^3$, kus x ja y on täisarvud. Märkame, et

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 &= (x-y)^3 + 3x^2y - 3xy^2 \\ &= (x-y)^3 + 3xy(x-y)\,. \end{aligned}$$

Kuna arv 2013 jagub 3-ga ja ka arv $3xy(x-y)$ jagub 3-ga, siis peaks ka nende arvude vahe $(x-y)^3$ jaguma 3-ga. Et 3 on algarv, siis peaks 3-ga jaguma ka $x-y$. Siis arv $3xy(x-y)$ jaguks 3^2-ga, arv $(x-y)^3$ aga jaguks koguni 3^3-ga, seega nende arvude summa $x^3 - y^3$ jaguks vähemalt 3^2-ga. Kuid 2013 ei jagu 3 kõrgemate astmetega. Saadud vastuolu näitab, et 2013 täisarvude kuupide vahena ei esitu.

Lahendus 2. Oletame, et $2013 = x^3 - y^3$, kus x ja y on täisarvud. Kuna arv 2013 jagub 3-ga, siis x^3 ja y^3 annavad 3-ga jagades sama jäägi. Kõigi jääkide läbivaatusega saab veenduda, et iga arvu kuup annab 3-ga jagades sama jäägi nagu arv ise. Seega ka x ja y annavad 3-ga jagades sama jäägi.

Kuupide vahe valemi põhjal aga $2013 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$. Et x ja y annavad 3-ga jagades sama jäägi, siis $x-y$ jagub 3-ga. Samal põhjusel annavad teise suluavaldise liidetavad x^2, xy ja y^2 kõik 3-ga jagades ühesuguse jäägi, mistõttu avaldis x^2+xy+y^2 jagub samuti 3-ga. Kokkuvõttes peab korrutis $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ jaguma 9-ga, mis annab vastuolu, kuna 2013 ei jagu 9-ga.

Lahendus 3. Näitame kõigi võimaluste läbivaatusega, et täisarvuliste x ja y korral ei ole võrdus $2013 = x^3 - y^3$ võimalik. Kui x ja y on negatiivsed, siis $x^3 - y^3 = -(-x)^3 + (-y)^3 = (-y)^3 - (-x)^3$, kus $-y$ ja $-x$ on positiivsed. Kui x on mittenegatiivne ja y negatiivne, siis $x^3 - y^3 = x^3 + (-y)^3$, kus x ja y on mõlemad mittenegatiivsed. Seega piisab näidata, et $2013 = x^3 - y^3$ ega $2013 = x^3 + y^3$ pole võimalik mittenegatiivsete täisarvude x ja y korral. Leiame kõigi 20-st väiksemate mittenegatiivsete täisarvude kuubid:

n	n^3	n	n^3	n	n^3	n	n^3
0	0	5	125	10	1000	15	3375
1	1	6	216	11	1331	16	4096
2	8	7	343	12	1728	17	4913
3	27	8	512	13	2197	18	5832
4	64	9	729	14	2744	19	6859

Et kahe mittenegatiivse täiskuubi summa oleks 2013, peab üks neist liidetavatest olema vähemalt pool summast ehk vähemalt 1007 ja samas mitte suurem kui 2013. Sellised täiskuubid on ainult 1331 ja 1728. Kuid siis ei saa teine liidetav olla täiskuup, sest nende arvude lahutamisel arvust 2013 saame vastavalt 682 ja 285, mis ei ole täiskuubid.

Juhul $2013 = x^3 - y^3$ peaks kehtima $2013 + y^3 = x^3$. Variandid, kus $y \leqslant 17$, ei sobi, sest arvude $0^3, 1^3, \ldots, 17^3$ liitmisel arvule 2013 saame 2013, 2014, 2021, 2040, 2077, 2138, 2229, 2356, 2525, 2742, 3013, 3344, 3741, 4210, 4757, 5388, 6109, 6926, millest ükski pole täiskuup.

Summa kuubi valemi abil leiame, et $(y+1)^3 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1$ ja $(y+2)^3 = y^3 + 6y^2 + 12y + 8$, kus $3y^2 + 3y + 1$ ja $6y^2 + 12y + 8$ ilmselt kasvavad y kasvades. Et $6y^2 + 12y + 8 > 2013$, kui $y = 18$, siis $(y+2)^3 - y^3 > 2013$ iga $y \geqslant 18$ korral, mistõttu $y \geqslant 18$ korral saab võrdus $2013 + y^3 = x^3$ kehtida ainult juhul $y < x < y + 2$. Täisarvulisust arvestades on ainus võimalus $x = y + 1$. Kuid $3y^2 + 3y + 1 < 2013$, kui $y = 25$, ja $3y^2 + 3y + 1 > 2013$, kui $y = 26$, mistõttu $(y+1)^3 - y^3 > 2013$ iga $y \geqslant 26$ korral ja $(y+1)^3 - y^3 < 2013$ iga $y \leqslant 25$ korral. Seega nõutud esitusi ei leidu.

2. *Vastus:* jah.

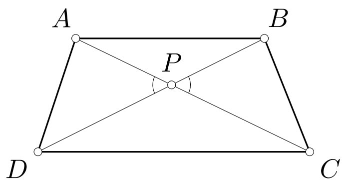
Lahendus 1. Piisab märgata, et

$$x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 - x) \cdot (x^2 + 1 + x) .$$

Lahendus 2. Kuna $x^6 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$, siis

$$x^4 + x^2 + 1 = \frac{x^6 - 1}{x^2 - 1} = \frac{x^3 - 1}{x - 1} \cdot \frac{x^3 + 1}{x + 1} = (x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - x + 1) .$$

3. *Lahendus 1.* Et trapetsi alused AB ja CD on paralleelsed, siis $\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PB|}{|PD|}$ ehk $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PC|}{|PD|}$ (joonis 13). Eeldusest järeldub aga $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PD|}{|PC|}$. Seega $|PC| = |PD|$. Võrdustest $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PD|}{|PC|}$ ja $\angle APD = \angle BPC$ tulenevalt



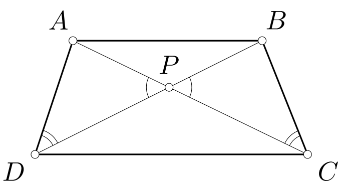
Joonis 13

on kolmnurgad APD ja BPC sarnased. Järelikult $\frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|PD|}{|PC|} = 1$, st $|AD| = |BC|$ ehk trapets $ABCD$ on võrdhaarne.

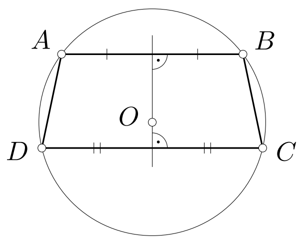
Lahendus 2. Et $\angle APD = \angle BPC$, siis eeldusest tulenevalt on kolmnurgad APD ja BPC sarnased. Seega $\angle ADP = \angle BCP$ ehk $\angle ADB = \angle ACB$ (joonis 14), mis tähendab, et $ABCD$ on kõõlnelinurk. Aga kui paralleelsete vastasküljedega nelinurgal leidub ümberringjoon, siis nende külgede keskristsirged ühtivad, sest on samasihilised ja läbivad ümberringjoone keskpunkti (joonis 15). Sümmeetria tõttu selle sirge suhtes on nelinurga teised vastasküljed võrdse pikkusega.

4. *Lahendus 1.* Et 5×5 ruudustikus on 25 ühikruutu, leidub vähemalt 13 ühikruutu, mis on sama värvi. Üldisust kitsendamata olgu nad sinised. Kui igas reas oleks ülimalt 2 sinist ruutu, siis oleks siniseid ruute kokku kuni 10, aga mitte 13. Järelikult maksimaalne siniste ruutude arv ühes reas on 3 kuni 5.

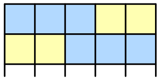
- Kui mõnes reas on 5 sinist ruutu, siis ülejäänud 4 reas on kokku vähemalt 8 sinist ruutu, mistõttu leidub rida, kus on vähemalt kaks sinist ruutu. Need ruudud koos nendega kohakuti olevate ruutudega üleni sinises reas moodustavadki nõutud kujundi.
- Kui ühes reas on maksimaalselt 4 sinist ruutu, siis nende ruutude veergudes on lisaks veel kokku vähemalt 5 sinist ruutu, sest ülejäänud veerus saab olla ülimalt 4 sinist ruutu. Neist 5 sinisest ruudust peab vähemalt kaks olema samas reas ning seega moodustavad nõutud kujundi koos nendega kohakuti asuvate ruutudega 4 sinise ruuduga reas.



Joonis 14



Joonis 15



Joonis 16

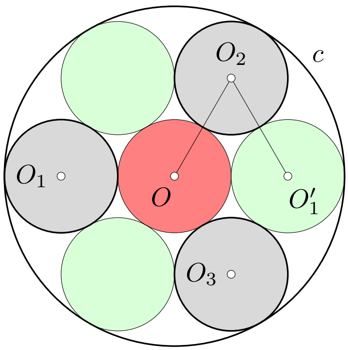
- Kui ühes reas on maksimaalselt 3 sinist ruutu, siis selliseid ridu peab olema vähemalt 3, et 13 sinist ruutu kokku tuleks. Kui kahes esimeses neist ridadest on kaks sinist ruutu samades veergudes, siis on nõutud ristkülik olemas. Vastasel korral on aga igas veerus vähemalt üks nende kahe rea sinine ruut (joonisel 16 on üldisust kitsendamata need kaks rida esimesed ja sinised ruudud kõrvuti). Seega emmas-kummas reas leidub kaks sinist ruutu, mis on kolmanda kolme sinise ruuduga rea siniste ruutudega kohakuti. Need moodustavad nõutud kujundi.

Lahendus 2. Esimeses reas on mingid kolm ruutu sama värvi; üldisust kitsendamata olgu nad sinised. Kui mõnes järgnevast 4 reast on kaks sinist ruutu vaadeldavate esimese rea siniste ruutudega kohakuti, siis on nõutud ristkülik olemas. Vastasel korral on igasühes neist 4 reast kaks kollast ruutu vaadeldavate esimese rea siniste ruutudega kohakuti. Kuna kaks kollast ruutu saab kolme veergu paigutada vaid 3 erineval viisil, siis leidub kaks rida, milles need kaks kollast ruutu paiknevad samades veergudes. Need kollased ruudud moodustavad nõutud kujundi.

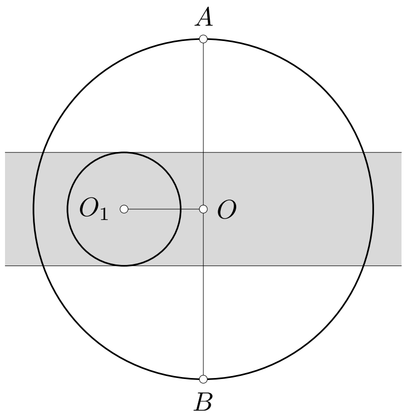
5. *Vastus:* 3.

Olgu ringjoone c keskpunkt O. Vaatleme olukorda, kus 3 ringjoont c_1, c_2, c_3 raadiusega 1 keskpunktidega vastavalt O_1, O_2, O_3 on paigutatud nii, et nad puutuvad sisemiselt ringjoont c ja O_1, O_2, O_3 on võrdkülgse kolmnurga tippudeks (joonisel 17 on need ringid seest hallid). Ükski uus ringjoon raadiusega 1 ei mahu täpselt kahe olemasoleva raadiusega 1 ringjoone vahele, sest kolm ringjoont raadiusega 1 ühel joonel nõuaksid vaba ala pikkusega 6, mis ringjoone c sees on võimalik ainult piki diameetrit. Seega on ülesandes nõutud viisil mõeldav lisada ringjoont raadiusega 1 kas keskele (joonisel 17 punane) või teisele poole kahe ringjoone vahelist kitsamat ala (joonisel 17 rohelised).

Ringjoon raadiusega 1, mille keskpunkt ühtib punktiga O, puutub neid kolme ringjoont, seega keskele paigutamine on võimalik täpselt ühel viisil. Ringjoon raadiusega 1, mille keskpunkt O_1' on sümmeetriline punktiga O sirge O_2O_3 suhtes, puutub ringjooni c_2 ja c_3 ning omab ka ringjoonega c vähemalt ühe ühise punkti, sest on ühel joonel keskele paigutatud ringjoonega ja ringjoonega c_1. Järelikult nii saab paigutada uut ringjoont ülimalt ühel viisil. Paneme tähele, et ringjoone c_2 nihutamisel punkti O suunas hakkab see lõikama ringjoont keskpunktiga O_1', sest $\angle OO_2O_1' < 90°$,



Joonis 17



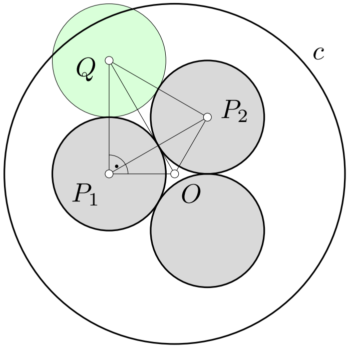
Joonis 18

samuti keskele paigutatud ringjoont. Seega kui ringjooned c_1, c_2, c_3 nihutada kõik pisut punkti O suunas, kaovad kõik võimalused paigutada uut ringjoont.

Kokkuvõttes, kui $n \geqslant 3$, siis Jüri saab ringjooned joonistada nii, et nõutud viisil uusi ringjooni lisada ei saa. Näitame, et $n \leqslant 2$ korral on uute ringjoonte lisamine võimalik; piisab vaadelda juhtu $n = 2$. Olgu need ringjooned c_1 ja c_2 keskpunktidega vastavalt O_1 ja O_2. Üldisust kitsendamata $O_1 \neq O$. Valime ringjoone c diameetri AB, mis on risti sirgega O_1O (joonis 18). Vaatleme kaht ringjoont raadiusega 1, mis puutuvad ringjoont c vastavalt punktides A ja B. Ringjoon c_1 ei takista neist kummagi lisamist joonisele, sest asub sirget O_1O ümbritsevas koridoris laiusega 2 (joonisel 18 hall), kuhu kumbki neist ringjoontest ei ulatu. Ringjoon c_2 saab takistada ülimalt ühe ringjoone lisamist neist, sest ei saa ulatuda mõlemale poole mainitud koridori.

Märkus. Tõestuseks, et 3 ringjoont saab paigutada nii, et ühtki ringjoont enam nõutud viisil lisada pole võimalik, saab anda ka lihtsa konkreetse konstruktsiooni. Nihutagu Jüri oma kolm ringjoont võrdkülgse kolmnurga tippudest keskpunkti O suunas sellise ühe ja sama pikkuse võrra, et need kolm ringjoont hakkavad üksteist paarikaupa puutuma (joonis 19). Näitame järgnevas otse, et uut ringjoont ei mahu paigutama ei keskele ega väljapoole.

Keskele paigutamiseks peaks olema $x \geqslant 1$, kus x on punkti O kaugus suvalisest Jüri joonistatud ringjoonest raadiusega 1. Teisi sõnu, $1 + x$ on punkti O kaugus selle ringjoone keskpunktist. Võrdhaarsest kolmnurgast, mille alus on pikkusega 2 ja haarad pikkusega $1 + x$, saame aga $1 + x < 2$, sest tipunurga suurus on $120^\circ > 60^\circ$. Seega $x < 1$ ja keskele paigutamine pole võimalik. Serva paigutamiseks ei tohiks ringjoon raadiusega 1, mis



Joonis 19

puutub kaht olemasolevat ringjoont raadiusega 1 teiselt poolt punkti O, ulatuda väljapoole ringjoont c. Olgu Q niisuguse uue ringjoone keskpunkt ning olgu P_1 ja P_2 teda puutuvate ringjoonte keskpunktid. Siis QP_1P_2 on võrdkülgne kolmnurk küljepikkusega 2 ja OP_1P_2 on võrdhaarne kolmnurk, mille alusnurga suurus on 30°. Seega $\angle QP_1O = \angle QP_2O = 90^\circ$. Et täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on pikem kui kaatet, siis $|OQ| > 2$. See aga tähendab, et ringjoon, mille keskpunkt on Q ja raadius 1, ulatub ringjoone c piiratavast alast välja.

Lahendused

1. Piisab näidata, et saadav lõpmatu kümnendmurd on perioodiline. Selleks paneme tähele, et iga lisatav number alates teisest on eelmise numbri kahekordse 10-ga jagamisel tekkiv jääk. Tõepoolest, olgu mingiks hetkeks olemasolevad numbrid $a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k$, kus a_k on juba Juku poolt juurde kirjutatud; siis järgmisena lisatav number a_{k+1} rahuldab tingimust

$$a_{k+1} \equiv a_1 + \ldots + a_k = (a_1 + \ldots + a_{k-1}) + a_k \equiv a_k + a_k = 2a_k \pmod{10} .$$

Niisiis on iga järgmine lisatav number viimase olemasoleva numbriga üheselt määratud. Et aga võimalikke numbreid on lõplik arv, siis varem või hiljem lisatakse mingi number teist korda. Vastavalt äsja tõestatule hakkavad ka kõik järgnevad numbrid sellest kohast alates korduma.

Märkus. Toodud lahenduse võib läbi viia ka ilma viitamata asjaolule, et iga lisatav number alates teisest on saadud eelmisest kahega korrutamise teel. Et võimalikke numbreid on lõplik arv, kuid Juku lisab numbreid lõputult, siis leidub murrus kaks ühesugust Juku lisatud numbrit, olgu nende järjekorranumbrid vastavalt m ja n. See tähendab, et m-st väiksema järjekorranumbriga numbrite summa ja n-st väiksema järjekorranumbriga numbrite summa annavad 10-ga jagades sama jäägi. Siis aga annavad ka summa, kus liidetakse numbrid kuni m-ndani (kaasaarvatud), ja summa, kus liidetakse numbrid kuni n-ndani (kaasaarvatud), 10-ga jagades sama jäägi. See aga tähendab, et ka numbrid järjekorranumbriga $m + 1$ ja $n + 1$ on võrdsed. Järelikult mingist kohast alates jäävad numbrid perioodiliselt korduma.

2. *Lahendus 1.* Ülesande tingimustest järeldub, et iga $k = 1, \ldots, n-1$ korral kehtivad seosed

$$|a_1 + \ldots + a_k| = |a_{k+1} + \ldots + a_n| ,$$

$$|a_1 + \ldots + a_k| + |a_{k+1} + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + \ldots + |a_k| + |a_{k+1}| + \ldots + |a_n| = 1 .$$

Järelikult iga $k = 1, \ldots, n-1$ korral $|a_{k+1} + \ldots + a_n| \leqslant \frac{1}{2}$. Nüüd

$$\begin{aligned} &|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n| \\ &\quad = |(a_1 + \ldots + a_n) + (a_2 + \ldots + a_n) + \ldots + (a_{n-1} + a_n) + a_n| \\ &\quad \leqslant |a_1 + \ldots + a_n| + |a_2 + \ldots + a_n| + \ldots + |a_{n-1} + a_n| + |a_n| \\ &\quad \leqslant 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n-1}{2}. \end{aligned}$$

Lahendus 2. Tähistame $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a$ ning $a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n = s(a)$.

Kui $s(a) < 0$, siis järjend $-a = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$ rahuldab samuti ülesande tingimusi, kusjuures $s(-a) > 0$ ja $|s(-a)| = |s(a)|$. Seetõttu piisab näidata nõutud võrratus eeldusel, et $s(a) > 0$.

Kui järjendi a viimane liige on mittepositiivne, siis leidub mingi $i < n$, mille korral liige a_i on positiivne. Olgu a' saadud järjendist a, vahetades liikmed a_n ja a_i; siis

$$s(a') - s(a) = (ia_n + na_i) - (ia_i + na_n) = (a_i - a_n)(n - i) > 0\,.$$

Järjend a' ilmselt rahuldab ülesande tingimusi, kusjuures a' viimane liige on positiivne ja $|s(a')| > |s(a)|$. Seetõttu piisab näidata nõutud võrratus eeldusel, et a_n on positiivne.

Kui järjendi a esimene liige on mittenegatiivne, siis leidub mingi $j > 1$, mille korral liige a_j on negatiivne. Olgu a'' saadud järjendist a, vahetades liikmed a_1 ja a_j; siis

$$s(a'') - s(a) = (ja_1 + a_j) - (a_1 + ja_j) = (a_1 - a_j)(j - 1) > 0\,.$$

Järjend a'' ilmselt rahuldab ülesande tingimusi, kusjuures a'' esimene liige on negatiivne ja $|s(a'')| > |s(a)|$. Seetõttu piisab näidata nõutud võrratus eeldusel, et a_1 on negatiivne.

Kui järjendis a leidub mõni positiivne liige a_i peale viimase, siis vaatame järjendit $\bar{a}$, mis on saadud a_i liitmisel n-ndale liikmele ja i-nda liikme muutmisel nulliks. Saame

$$s(\bar{a}) - s(a) = n(a_n + a_i) - (ia_i + na_n) = (n - i)a_i > 0\,.$$

Järjend $\bar{a}$ rahuldab samuti ülesande tingimusi, kusjuures järjendis $\bar{a}$ on vähem positiivseid liikmeid ja $|s(\bar{a})| > |s(a)|$. Samamoodi jätkates võime kaotada kõik positiivsed liikmed peale viimase. Seetõttu piisab näidata nõutud võrratus eeldusel, et järjendi a ainus positiivne liige on a_n.

Kui järjendis a leidub mõni negatiivne liige a_j peale esimese, siis vaatame järjendit $\bar{\bar{a}}$, mis on saadud a_j liitmisel 1-sele liikmele ja j-nda liikme muutmisel nulliks. Saame

$$s(\bar{\bar{a}}) - s(a) = (a_1 + a_j) - (a_1 + ja_j) = a_j(1 - j) > 0\,.$$

Järjend $\bar{\bar{a}}$ rahuldab samuti ülesande tingimusi, kusjuures järjendis $\bar{\bar{a}}$ on vähem negatiivseid liikmeid ja $|s(\bar{\bar{a}})| > |s(a)|$. Samamoodi jätkates võime kaotada kõik negatiivsed liikmed peale esimese. Seetõttu piisab näidata nõutud võrratus eeldusel, et järjendi a ainus negatiivne liige on a_1.

Kahest viimasest eeldusest järeldub, et $a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0$. Koos eeldustega $a_1 < 0$ ja $a_n > 0$ ning ülesande tingimustega saame, et $a_1 = -\frac{1}{2}$ ja $a_n = \frac{1}{2}$. Kuid sellisel juhul $s(a) = \frac{n-1}{2} \geqslant \frac{n-1}{2}$ ja ülesande väide on tõestatud.

Märkus. Lahendus 2 näitab lisaks nõutud võrratusele ühtlasi piiri $\frac{n-1}{2}$ saavutatavust.

3. *Lahendus 1.* Tähistame $\angle DAB = \alpha$ ja $\angle ABC = \beta$ (joonis 20). Kõõlnelinurkadest $AEFD$ ja $BEFC$ saame vastavalt

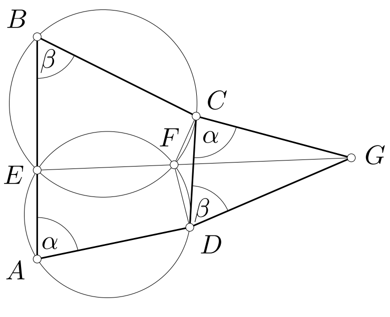
$$\angle DFE = 180^\circ - \angle DAE = 180^\circ - \alpha\,,$$
$$\angle CFE = 180^\circ - \angle CBE = 180^\circ - \beta\,.$$

Seega
$$\angle CFD = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - (180^\circ - \beta) = \alpha + \beta.$$

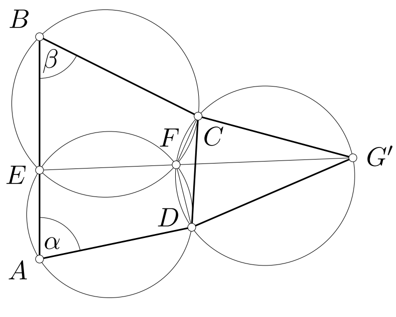
Samas $\angle CGD = 180^\circ - (\alpha+\beta)$ vastavalt punkti G valikule. Seega $CFDG$ on kõõlnelinurk. Järelikult

$$\angle DFG = \angle DCG = \alpha = 180^\circ - \angle DFE\,,$$

kust nähtubki, et punktid E, F, G on ühel sirgel.



Joonis 20



Joonis 21

Lahendus 2. Nagu lahenduses 1 tähistame $\alpha = \angle DAB$ ja $\beta = \angle ABC$ ning näitame, et $\angle DFE = 180^\circ - \alpha$ ja $\angle CFE = 180^\circ - \beta$. Olgu G' kolmnurga CFD ümberringjoone teine lõikepunkt sirgega EF (joonis 21). Siis $CFDG'$ on kõõlnelinurk, mistõttu

$$\angle DCG' = \angle DFG' = 180^\circ - \angle DFE = \alpha\,,$$
$$\angle CDG' = \angle CFG' = 180^\circ - \angle CFE = \beta\,.$$

Neist võrdustest aga järeldub, et $G' = G$. Seega G asub sirgel EF.

Märkus. Ülesande väide jääb kehtima ka juhul, kui punkt F võib asuda mujal kui nelinurga $ABCD$ sees. Siis võib ka juhtuda, et G asub punktide E ja F vahel.

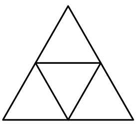
4. Igas reas on k arvu mediaanist suuremad ja k arvu mediaanist väiksemad. Seega on reas $k+1$ arvu, mis ei ületa suuruselt selle rea mediaani. Ridades, mille mediaan ei ületa suuruselt arvu m, ei ületa need $k+1$ arvu ka arvu m. Selliseid ridu on samuti $k+1$. Kokku on järelikult vähemalt $(k+1)^2$ arvu, mis ei ületa suuruselt arvu m. Neist ainult üks on m-ga võrdne, seega m-st väiksemaid arve on vähemalt $(k+1)^2-1$ ehk k^2+2k. Kuna k on positiivne, siis $1 < 4k$, mis annab $4k+1 < 4k+4k = 8k$. Seega

$$\frac{k^2+2k}{(2k+1)^2} = \frac{k^2+2k}{4k^2+4k+1} > \frac{k^2+2k}{4k^2+8k} = \frac{1}{4},$$

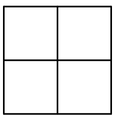
mida oligi tarvis tõestada.

5. *Vastus:* 3, 4, 6, 12.

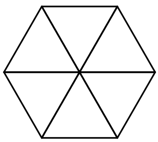
Korrapärase kolmnurga saab lihtsasti jaotada neljaks ühesuguseks korrapäraseks kolmnurgaks (joonis 22), korrapärase nelinurga neljaks ühesuguseks korrapäraseks nelinurgaks (joonis 23) ning korrapärase kuusnurga kuueks ühesuguseks korrapäraseks kolmnurgaks (joonis 24). Ehitades korrapärase 12-nurga külgedele 12-nurga sisse vaheldumisi võrdkülgsed kolmnurgad ja ruudud, jääb 12-nurgast üle parajasti üks korrapärane kuusnurk (joonis 25), niisiis on ka korrapärast 12-nurka võimalik nõutud viisil jaotada.



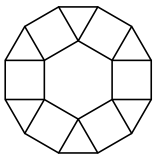
Joonis 22



Joonis 23



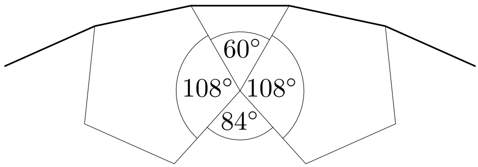
Joonis 24



Joonis 25

Näitame, et teisi korrapäraseid hulknurki pole võimalik väiksemateks korrapärasteks hulknurkadeks tükeldada. Selleks vaatleme suvalist nõutud viisil tükeldatud korrapärast n-nurka. Kuna korrapärase hulknurga sisenurga suurus on väiksem kui 180° ja vähim võimalik korrapärase hulknurga sisenurga suurus on võrdkülgse kolmnurga 60°, saab ühe tipu juures kohtuda ülimalt kaks korrapärast hulknurka.

Kui tükeldatava n-nurga mingi tipu juures oleva nurga täidab ainult üks väiksem korrapärane hulknurk, siis see tükk on samuti n-nurk. Tema kõrvale peab mahtuma veel vähemalt üks korrapärane hulknurk. Üle kahe korrapärase hulknurga pole võimalik tema kõrvale mahutada, sest koos tema



Joonis 26

endaga oleks nende sisenurkade summa rohkem kui $3 \cdot 60^\circ$ ehk 180°. Kaks uut tükki on võimalik mahutada ainult juhul, kui need kaks ja esimene tükk on kõik kolmnurksed, millest tuleneb $n = 3$. Jääb üle juht, kus n-nurkse tüki kõrvale on paigutatud täpselt üks hulknurk. Siis n-nurga sisenurga suurus on ülimalt 120°, millest $n \leqslant 6$. Juht $n = 5$ pole võimalik, sest korrapärase viisnurga sisenurga suurus on 108° ja välisnurga suurus 72°, kuid ühegi korrapärase hulknurga sisenurga suurus pole 60° ja 90° vahel.

Kui tükeldatava n-nurga iga tipu juures kohtuvad kaks väiksemat korrapärast hulknurka, siis peab üks neist olema kolmnurk, sest teiste korrapäraste hulknurkade sisenurgad on suurusega 90° või enam. Kolmnurga kõrvale mahub kas kolmnurk, nelinurk või viisnurk. Kahel esimesel juhul on n-nurga sisenurga suurus vastavalt 120° ja 150°, millest vastavalt $n = 6$ ja $n = 12$. Näitame, et kolmas juht, kus n-nurga iga tipu juures kohtuvad kolmnurk ja viisnurk, pole võimalik. Tõepoolest, viisnurga küljepikkus peab ühtima tükeldatava n-nurga küljepikkusega, sest viisnurga kõrvale ei saa paigutada ühtki korrapärast hulknurka. Samal põhjusel peab algse hulknurga sellest küljest, millele on ehitatud viisnurk, ülejärgmisele küljele olema ehitatud samuti viisnurk. Need kaks viisnurka aga kohtuvad punktis, milles asub algse hulknurga vahepealsele küljele ehitatud võrdkülgse kolmnurga tipp (joonis 26). Kuid kahe viisnurga ühisest tipust teisele poole jääb nurk suurusega $360^\circ - 2 \cdot 108^\circ - 60^\circ$ ehk 84°, mida pole võimalik täita korrapäraste hulknurkade sisenurkadega.

Lahendused

1. *Vastus:* 14.

Lahendus 1. Märkame, et paarisarvude neljas aste jagub 16-ga ja paaritute arvude neljas aste annab 16-ga jagades jäägi 1. Et 2013 annab 16-ga jagades jäägi 13, siis peab tema esituses neljandate astmete summana olema vähemalt 13 paaritut liidetavat.

Oletame, et rohkem liidetavaid pole vaja ehk mingite paaritute arvude $a_1, \ldots, a_{13}$ korral $a_1^4 + \ldots + a_{13}^4 = 2013$. Et $(2 \cdot 3 + 1)^4 = 7^4 = 2401 > 2013$, siis iga liidetav on kas $1^4 = 1$, $3^4 = 81$ või $5^4 = 625$. Liidetavaid 625 saab olla ülimalt 3, sest $4 \cdot 625 > 2013$. Järelikult teisi ehk 5-ga mitte jaguvaid liidetavaid peab olema vähemalt 10. Kuid 5-ga mitte jaguva arvu neljas aste annab 5-ga jagades jäägi 1, samas kui 2013 annab 5-ga jagades jäägi 3. Seega peab 5-ga mitte jaguvaid liidetavaid olema vähemalt 13, mis tähendab, et liidetavaid 625 ei saa üldse olla. Järelikult summa koosnebki liidetavatest 1 ja 81, kuid 13 sellise liidetava summa on ülimalt $13 \cdot 81 < 1300 < 2013$. Seega esitus summana 13 neljandast astmest pole võimalik.

Teiselt poolt, 14 neljandat astet on piisav, sest $6^4 + 5^4 + 3^4 + 11 \cdot 1^4 = 2013$.

Lahendus 2. Seda, et 2013 ei esitu 13 paaritu arvu neljanda astme summana, saab tõestada ka järgmiselt. Oletame nagu lahenduses 1, et

$$a_1^4 + \ldots + a_{13}^4 = 2013\,, \tag{1}$$

kusjuures iga $i = 1, \ldots, 13$ korral $a_i = 2b_i + 1$. Et iga liidetav on kas 1^4, 3^4 või 5^4, siis võib eeldada, et iga b_i on üks arvudest 0, 1 ja 2. Et

$$(2x+1)^4 = 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1 = 16\left(x^4 + 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right) + 1$$

ning

$$x^4 + 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = x^4 + 2x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = x^2(x+1)^2 + \frac{1}{2}x(x+1)\,,$$

siis tähistades $f(x) = x^2(x+1)^2 + \frac{1}{2}x(x+1)$, taandub seos (1) kujule

$$f(b_1) + f(b_2) + \ldots + f(b_{13}) = \frac{2013 - 1 - 1 - \ldots - 1}{16} = 125\,.$$

Seega arv 125 peaks esituma summana 13 liidetavast, kus iga liidetav on kas $f(0)=0$, $f(1)=5$ või $f(2)=39$. Et 0, 5 ja 125 ise jaguvad 5-ga, siis liidetavaid 39 peaks selleks olema 5-ga jaguv arv. Kuna $5\cdot 39>125$, jääb üle ainult võimalus, et selliseid liidetavaid ei ole. Kuid säärasel juhul peaks ainuüksi liidetavaid 5 olema 25 tükki, mis on võimatu.

2. *Lahendus 1.* Kui arvude x_1, x_2, x_3, x_4 seas leidub võrdseid, siis $K=0$, mis pole võimalikest suurim. Seega üldisust kitsendamata $x_1>x_2>x_3>x_4$. Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vaheline võrratus arvude x_1-x_2, x_2-x_3 ja x_3-x_4 jaoks annab

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_4)} &\leqslant \frac{(x_1-x_2)+(x_2-x_3)+(x_3-x_4)}{3}=\\ &= \frac{x_1-x_4}{3}\leqslant\frac{1}{3}\end{aligned}$$

ehk $|x_1-x_2|\cdot|x_2-x_3|\cdot|x_3-x_4|\leqslant\frac{1}{27}$. Et K ülejäänud tegurite $|x_1-x_3|$, $|x_1-x_4|$, $|x_2-x_4|$ seas leidub 1-st väiksem, siis $K<\frac{1}{27}$ ehk kehtib vasakpoolne nõutud võrratus.

Teise võrratuse jaoks piisab näha, et juhul $x_1=1$, $x_2=\frac{3}{4}$, $x_3=\frac{1}{4}$, $x_4=0$ saame

$$K\geqslant\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{512}>\frac{4}{243}\,,$$

sest $9\cdot 243=2187>2048=4\cdot 512$.

Lahendus 2. Üldisust kitsendamata eeldame nagu eelmises lahenduses, et $x_1>x_2>x_3>x_4$. Lisaks võime eeldada, et $x_1=1$ ja $x_4=0$, sest mõne muu x_1 asendamisel 1-ga ja x_4 asendamisel 0-ga korrutis K suureneb. Asendades lihtsuse mõttes $x_2=y$ ja $x_3=z$, saame niisiis

$$K=(1-y)(1-z)(y-z)yz=(y-z)\cdot(1-y)z\cdot(1-z)y\,.$$

Vaadeldes selliseid paare (y,z), kus $y-z$ on fikseeritud, on fikseeritud ka summad $(1-y)+z=1-(y-z)$ ja $(1-z)+y=1+(y-z)$. Kahe arvu korrutis on fikseeritud summa puhul suurim juhul, kui need arvud on võrdsed, seega korrutis $(1-y)z$ on suurim, kui $1-y=z$ ehk juhul $y+z=1$, ja korrutis $(1-z)y$ on suurim, kui $1-z=y$ ehk täpselt samal juhul $y+z=1$. Järelikult ka K suurima väärtuse korral $y+z=1$. Pannes K avaldises y asemele $1-z$, saame $K=z^2(1-z)^2(1-2z)=(z(1-z))^2\,(1-2z)$.

Olgu $f(z)=(z(1-z))^2\,(1-2z)$, siis

$$\begin{aligned}f'(z) &= 2z(1-z)(1-z-z)(1-2z)-2\,(z(1-z))^2\\ &= 2z(1-z)\left((1-2z)^2-z(1-z)\right)\\ &= 2z(1-z)(1-5z+5z^2)\,.\end{aligned}$$

Tuletise f' nullkohad vahemikus $(0,1)$ on ruutpolünoomi $5z^2-5z+1$ nullkohad $\frac{5-\sqrt{5}}{10}$ ja $\frac{5+\sqrt{5}}{10} = 1-\frac{5-\sqrt{5}}{10}$. Et $f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ja piirides $0 < z < \frac{1}{2}$ on $f(z) > 0$, siis $z = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$ on funktsiooni f maksimumkoht. Seega K suurim väärtus on

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right) &= \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\cdot\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)^2\cdot\left(1-\frac{10-2\sqrt{5}}{10}\right) \\ &= \frac{4}{100}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{10} = \frac{8\sqrt{5}}{1000} = \frac{\sqrt{5}}{125}. \end{aligned}$$

Arv $\frac{\sqrt{5}}{125}$ rahuldab ülesande esimest võrratust, sest $\frac{125}{27} > \frac{120}{30} = 4 > \sqrt{5}$. Teine võrratus on samuti rahuldatud, sest $\frac{125\cdot 4}{\sqrt{5}} = \frac{500}{\sqrt{5}} = 100\sqrt{5} < 243$.

Lahendus 3. Ülesande teise võrratuse saab tõestada ka järgnevalt. Fikseerime $x_1 = 1$, $x_3 = \frac{1}{3}$ ja $x_4 = 0$ ning vaatleme ülesandes antud korrutist sõltuvana suurusest $y = x_2$. Vastavaks funktsiooniks saame

$$\begin{aligned} f(y) &= (1-y)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot(1-0)\cdot\left(y-\frac{1}{3}\right)\cdot(y-0)\cdot\left(\frac{1}{3}-0\right) \\ &= (1-y)\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(y-\frac{1}{3}\right)\cdot y\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{9}\cdot(1-y)\left(y-\frac{1}{3}\right)y = \frac{2}{9}h(y)y\,, \end{aligned}$$

kus $h(y) = (1-y)\left(y-\frac{1}{3}\right)$. Paneme tähele, et

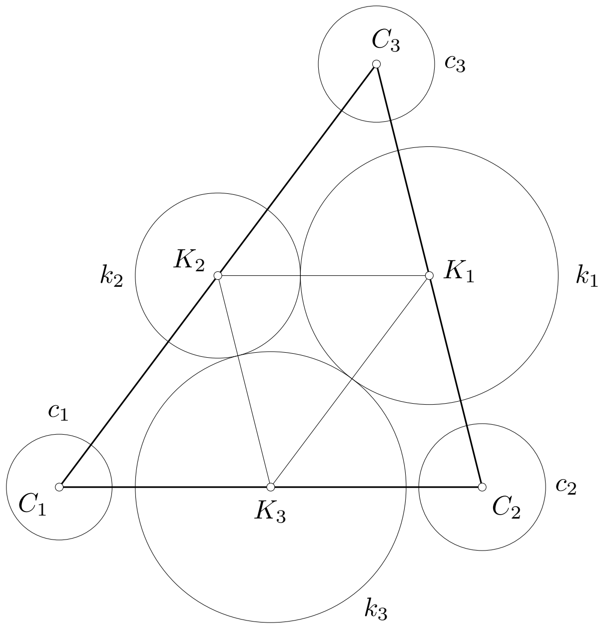
$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{243}\,.$$

Et $h'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$, siis

$$f'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}\cdot h\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 \neq 0\,,$$

mistõttu funktsiooni f väärtused on ühel pool kohta $y = \frac{2}{3}$ suuremad kui $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{243}$. Seega ka $K > \frac{4}{243}$.

3. Olgu ringjoonte c_1, c_2, c_3 raadiused vastavalt r_1, r_2, r_3 ning ringjoonte k_1, k_2, k_3 raadiused vastavalt R_1, R_2, R_3. Ülesande teksti (vt joonist 27) koha-



Joonis 27

selt

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 &= |K_1K_2| = \frac{1}{2}|C_1C_2|\,, \\ R_2 + R_3 &= |K_2K_3| = \frac{1}{2}|C_2C_3|\,, \\ R_3 + R_1 &= |K_3K_1| = \frac{1}{2}|C_3C_1|\,, \end{aligned}$$

mis kokku liites annavad võrduse

$$2R_1 + 2R_2 + 2R_3 = \frac{1}{2}\left(|C_1C_2| + |C_2C_3| + |C_3C_1|\right) .$$

Samuti tulenevad ülesande eeldustest võrratused

$$\begin{aligned} r_1 + R_3 &\leqslant \frac{1}{2}|C_1C_2|\,, & R_3 + r_2 &\leqslant \frac{1}{2}|C_1C_2|\,, \\ r_2 + R_1 &\leqslant \frac{1}{2}|C_2C_3|\,, & R_1 + r_3 &\leqslant \frac{1}{2}|C_2C_3|\,, \\ r_3 + R_2 &\leqslant \frac{1}{2}|C_3C_1|\,, & R_2 + r_1 &\leqslant \frac{1}{2}|C_3C_1|\,, \end{aligned}$$

mis kokku liites annavad

$$2r_1 + 2r_2 + 2r_3 + 2R_1 + 2R_2 + 2R_3 \leqslant |C_1C_2| + |C_2C_3| + |C_3C_1|.$$

a) Saadud seostest järeldub $2r_1 + 2r_2 + 2r_3 \leqslant \frac{1}{2}(|C_1C_2| + |C_2C_3| + |C_3C_1|)$, kust $r_1 + r_2 + r_3 \leqslant \frac{1}{4}(|C_1C_2| + |C_2C_3| + |C_3C_1|)$. See aga tähendabki, et ringjoonte c_1, c_2, c_3 raadiuste summa on ülimalt veerand kolmnurga $C_1C_2C_3$ ümbermõõdust.

b) Oletame, et $r_1 + r_2 + r_3 = \frac{1}{4}(|C_1C_2| + |C_2C_3| + |C_3C_1|)$. Siis kõigis ülal saadud võrratustes kehtib võrdus. Seosest $r_1 + R_3 = \frac{1}{2}|C_1C_2| = r_2 + R_3$ tuleneb $r_1 = r_2$, analoogiliselt $r_1 = r_3$. Tähistades $r = r_1 = r_2 = r_3$, saame kirjutada

$$\begin{aligned} r + R_3 &= \frac{1}{2}|C_1C_2| = R_1 + R_2 \,, \\ r + R_2 &= \frac{1}{2}|C_1C_3| = R_1 + R_3 \,, \end{aligned}$$

kust poolte kokkuliitmine annab $2r + R_2 + R_3 = 2R_1 + R_2 + R_3$ ehk $R_1 = r$. Analoogiliselt ka $R_2 = R_3 = r$. Kolmnurga $C_1C_2C_3$ kõik küljed on niisiis ühe ja sama pikkusega $4r$.

4. Näitame, et suvalise maagilise ruudu saab loetletud teisenduste abil viia üheks fikseeritud maagiliseks ruuduks. Et kõik need teisendused on pööratavad, siis järeldub sellest tõestatav väide, kuna mistahes kahe maagilise ruudu korral saame ühe neist esmalt teisendada selleks fikseeritud ruuduks ja selle omakorda edasi teiseks antud ruuduks.

Kõigi arvude kogusumma maagilises ruudus on $\frac{9 \cdot (9+1)}{2} = 45$ ning igas reas ja veerus olevate arvude summa on seega $\frac{45}{3} = 15$. Selleks, et kolme arvu summa saaks olla paaritu arv 15, peab nende hulgas olema 0 või 2 paarisarvu. Et arvude 1 kuni 9 hulgas on kokku 4 paarisarvu, peab mingis kahes reas olema kummaski 2 paarisarvu ja kolmandas reas mitte ühtegi. Sarnane väide kehtib ka veergude jaoks.

2		**4**
6		**8**

2		**4**
8		**6**

2		**6**
8		**4**

Joonis 28

2	9	**4**
7	5	3
6	1	**8**

Joonis 29

Seega paarisarvud 2, 4, 6, 8 esinevad maagilises ruudus mingi ruudu külgedega paralleelsete külgedega ristküliku tippudes. Ridade ja veergude järjekorra muutmistega võime saavutada olukorra, kus paarisarvud asuvad ruudustiku nurkades. Nende paiknemiseks seal on 3 erinevat võimalust, mis ei ole üksteisest saadavad ruudu pööramise ja diagonaali suhtes peegeldamise abil (joonis 28). Neist kaks viimast ei saa aga maagilises ruudus esineda, sest esimesse ja kolmandasse veergu tuleks siis veerusumma 15 saamiseks lisada sama arv 5. Niisiis jääb üle ainult esimene võimalus. Arvestades, et iga rea ja veeru arvude summa peab olema 15, näeme, et selle saab täiendada maagiliseks ruuduks ühelainsal, joonisel 29 näidatud viisil.

5. *Vastus:* a) enne kui Jüri arve kirjutama hakkab; b) kui Jüri on kirjutanud 2 arvu.

Aritmeetilise jada n järjestikuse liikme summa avaldub kujul

$$s_n = \left(a + \frac{(n-1)d}{2}\right) \cdot n\,,$$

kus a on esimene liidetav ja d jada vahe. Siit on näha, et paaritu n korral on $\frac{n-1}{2}$ täisarv, mistõttu summa jagub n-ga sõltumatult arvude valikust. Paaris n korral on $\frac{(n-1)d}{2}$ täisarv parajasti siis, kui d on paaris. Selle saab Mari teada pärast teise liikme ilmumist tahvlile.

Eesti LX matemaatikaolümpiaad

6. aprill 2013 Lõppvoor **9. klass**

Hindamisskeemid

1. *(Siim Karus)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Põhjendatud sobiv lahend $n = 0$: 2 p
- Põhjendatud sobiv lahend $n = 1$: 2 p
- Näidatud, et $n \ngtr 1$: 3 p

Põhjenduseta vastus andis 1 p, iga pisivea eest lahutati 1 p.

2. *(Ivo Adermann)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Märgatud, et -1 ei jää määramispiirkonda: 1 p
- Märgatud, et 0 ei jää määramispiirkonda: 1 p
- Teisendatud võrrand kujule, kust saab edasiste teisendusteta kätte lahendid: 1 p
- Arvutatud sobiv lahend $x = 1$: 1 p
- Lahendatud tekkinud võrrand $(x + 1)^2 = 1$: 2 p

  Sealhulgas:
  - Arvutatud selle lahend $x = -2$: *1 p*
  - Arvutatud selle lahend $x = 0$: *1 p*
- Mainitud, et leitud lahend $x = 0$ ei sobi: 1 p

Enamus lahendajaid polnud üldse selle peale tulnud, et enne teisenduste tegemist määramispiirkonda vaadata või enne teisendust kontrollida, ega parasjagu nulliga ei jagata ega korrutata, mistõttu on suurem osa punktikaotusi just sellest tingitud. Puuduva või puuduliku lahenduskäigu korral ainult ühe õige lahendi kirja panemise eest anti 0 punkti.

3. *(Uve Nummert)*

- a)-osa: 5 p
- b)-osa: 2 p

  Sealhulgas:
  - Toodud näide kuusnurga küljepikkuste 1, 2, 3, 4, 5, 6 sobivast järjestusest: *1 p*
  - Selgitatud, miks selliste küljepikkustega võrdnurkne kuusnurk eksisteerib: *1 p*

Osa b) eest täispunktide saamiseks oli vaja selgitust, miks esitatud küljepikkustega võrdnurkne kuusnurk tõepoolest eksisteerib — ainult kontrollist, et küljepikkused rahuldavad a) osa väidet, ei piisa, kui pole tõestatud, et mistahes seda tingimust rahuldav küljepikkuste järjend on võimalik.

Osa a) eest said 1 punkti tööd, kus oli kirjeldatud žürii lahenduses 3 toodud teisenduse (2) idee, kuid puudus põhjendus, et *mistahes* võrdnurkse kuusnurga saame selliste teisenduste abil korrapärasest kuusnurgast, mille jaoks tõestatav väide kehtib. (See väide tegelikult kehtib, sest lahenduses 3 kasutatud teisendus (1) on esitatav kahe teisenduse (2) kombinatsioonina.)

4. *(Reimo Palm)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Täislahendus: 7 p
- Strateegia ja analüüs muidu õiged, esineb ainult mõni väiksem puudujääk või viga, mis lahenduse põhijoont ei mõjuta: 6 p
- Strateegia õige, aga analüüs liiga ebamäärane: 4–5 p
- Korrektselt tõestatud ainult, et esimene mängija võidab siis, kui teine mängija teeb oma esimese käigu nurka, ja tehtud mõned kasulikud üldised tähelepanekud: 3 p
- Strateegia kirjeldamata või vale või piisava konkreetsuseta: 0 p
- Eeldatud, et mängitakse tavalist trips-traps-trulli: 0 p

5. *(Erik Paemurru)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Lahendatud a-osa: 2 p

  Sealhulgas:
  - Tõestatud, et punktide arv on vähemalt 3: *1 p*
  - Näidatud, et kui kolm punkti paigutada võrdkülgse kolmnurga tippudesse, siis ülesande tingimused on täidetud: *1 p*
- Lahendatud b-osa: 5 p

  Sealhulgas:
  - Tõestatud, et iga kahe kõrvutioleva täidetud veeämbri vahele jääb sama arv tühje veeämbreid: *4 p*
  - Õige vastus: *1 p*

Paljudel õpilastel jäi puudu matemaatilisest korrektsusest. Osas b) tihti lihtsalt väideti, et täidetud veeämbrid paiknevad korrapäraselt ilma seda tõestamata. Selle eest punkte ei antud.

Hindamisskeemid

1. *(Aleksei Lissitsin)*

Valdav osa osalejaid proovis ülesannet lahendada järgmisel viisil. Avaldati $2013 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ ja vaadati arvu 2013 tegureid. Erinevate tegurite paaride (n, m), kus $nm = 2013$, korral koostati võrrandisüsteem

$$\begin{cases} a-b &= n \\ a^2+ab+b^2 &= m \end{cases}$$

ja näidati, et sellel ei ole täisarvulisi lahendeid.

Selle lahendamisviisi hindamisskeem on järgmine.

- Tähelepanek, et $2013 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ ja saab vaadata arvu 2013 tegureid: 1 p
- Plaan vaadata läbi kõik positiivsete tegurite paarid (neid on 8): 2 p

  Sealhulgas:
  - Planeeritud vaadata ainult 6 neist: *1 p*
- Korrektselt läbi töötatud või kõrvaldatud negatiivsete tegurite juhtum: 1 p
- Korrektselt läbi töötatud kõik positiivsete arvude paarid: 3 p

  Sealhulgas:
  - Korrektselt ja täielikult läbitöötatud üks positiivne paar: *1 p*
  - Korrektselt ja täielikult läbitöötatud vähemalt 6 positiivset paari: *1 p*

Kõige lihtsam lahendusviis sellele ülesandele tundub olevat *modulo* 7 jääkide vaatamine. Sellise lahendusviisiga saabus ainult üks lahendus, mis sai ka täispunktid.

2. *(Elts Abel)*

Esitame kõigepealt kolm skeemi, kus vastavate osade eest antud punktid summeeriti.

Skeem žürii lahenduse 1 järgi.

- Avaldis esitatud kujul $(x^2+1)^2 - x^2$: 4 p
- Kasutatud ruutude vahe valemit ja viidud tegurdamine lõpuni: 3 p

Skeem žürii lahenduse 2 järgi.

- Avaldis esitatud kujul $\dfrac{x^6-1}{x^2-1}$: 3 p
- Lugeja tegurdatud ruutude vahe valemiga: 1 p
- Edasi viidud murd kujule $\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x+1)}$: 1 p
- Murd taandatud ja korrastatud: 2 p

Skeem kordajate süstemaatilise analüüsi kasutava lahenduse järgi.

- Avaldis esitatud kujul $(a_1x^2+a_2x^1+a_3x^0)(b_1x^2+b_2x^1+b_3x^0)$: 1 p
- Koostatud vastavad võrrandid kordajate määramiseks: 3 p
- Leitud ülesande tingimusi rahuldavad kordajad: 3 p

Tüüpiliste osaliste lahenduste eest aga anti punkte järgnevalt.

- Näidatud, et hulkliige ei avaldu kahe reaalarvuliste kordajatega kaksliikme korrutisena: 1 p
- Näidatud, et hulkliige ei avaldu ühe kaksliikme ja ühe kolmliikme korrutisena: 1 p
- Hulkliige esitatud vähemalt kahe avaldise korrutisena, kus esinevad negatiivsed astendajad: 0 p

Hulkliikmes saavad muutuja astendajateks olla vaid mittenegatiivsed täisarvud.

3. *(Härmel Nestra)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Täislahendus: 7 p

  Sealhulgas:
  - Näidatud tippnurkade võrdsus punkti P juures: *1 p*
  - Näidatud kolmnurkade APD ja BPC sarnasus: *1 p*
  - Näidatud kolmnurkade APB ja DPC sarnasus: *1 p*
  - Mainitud lõikude AB ja CD paralleelsus: *1 p*
  - Leitud võrdsed suhted $\dfrac{|PA|}{|PC|}=\dfrac{|PB|}{|PD|}$: *1 p*
  - Mainitud trapetsi haarade võrdsuse järeldumine kas trapetsi alusnurkade võrdusest, diagonaalide võrdsusest või kolmnurkade APB ja DPC võrdhaarsusest: *1 p*

Alapunktid ei anna 7 punkti kokku, sest iga lahendaja sidus lahenduse elemendid kokku erinevalt, välja on toodud vaid tüüpilised osad. Kõiki skeemis mainitud punkte ei läinud täislahenduseks tingimata vaja.

4. *(Ago-Erik Riet)*

Lahenduste allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

Skeem žürii esimese lahenduse järgi.

- Analüüsitud juht, kus ühes reas/veerus on kõik ruudud sama värvi: 1 p
- Analüüsitud juht, kus ühes reas/veerus on 4 ruutu sama värvi: 2 p
- Analüüsitud juht, kus igas reas/veerus jagunevad värvid 2/3 või 3/2: 4 p

Lisaskeem otsesema variandi järgi.

- Põhjendatud, et leidub vähemalt 3 rida (veergu), millest igaühes on vähemalt 3 sinist (kollast) ruutu: 4 p

  Sealhulgas:

  - See väide ilma põhjenduseta: *3 p*
- Sellest järeldatud, et leidub siniste (kollaste) tippudega ristkülik: 3 p

Teise skeemi aluseks on järgmine žürii lahendusega 1 sarnane, kuid otsesem mõttekäik. Igas reas leidub (Dirichlet' printsiibi põhjal) vähemalt 3 sama värvi ruutu. Et ridu on 5, siis leidub (jälle Dirichlet' printsiibi põhjal) vähemalt 3 rida, kus see värv on sama. Seega üldisust kitsendamata leidub vähemalt 3 rida, millest igaühes on vähemalt 3 sinist ruutu. Nüüd jätkame nagu žürii esimese lahenduse kolmandas alapunktis.

5. *(Kairi Kangro)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et $n = 3$ korral saab ringid ülesande nõuetele vastavalt paigutada: 3 p

  Sealhulgas:

  - Tehtud joonis ja üritatud põhjendada, miks rohkem ringe lisada ei saa: *1 p*
  - Põhjendus korrektselt lõpule viidud: *2 p*
- Tõestatud, et $n \leqslant 2$ korral on alati võimalik veel üks ring lisada: 4 p

  Sealhulgas:

  - Üritatud joonistele toetudes põhjendada, miks alati saab ringi lisada: *1 p*
  - Põhjendus korrektselt lõpule viidud: *3 p*

Hindamisskeemid

1. *(Aleksandr Šved)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Täielik lahendus: 7 p
- On märgatud, kuid pole tõestatud, et tekib arvude tsükkel; on vaadatud kõik esialgselt tekkivaid jääke ning öeldud, et selle puhul arv on ratsionaalne: 5 p
- On märgatud, kuid pole tõestatud, et tekib arvude tsükkel; on näidatud, et peale esimese arvu lisamist on jääk alati paarisarv ning öeldud, et selle puhul arv on ratsionaalne: 4 p
- On märgatud, kuid pole tõestatud, et tekib arvude tsükkel: 2 p

Paljud õpilased ei näidanud, kuidas nad uued jäägid said, ning ei tõestanud, miks seal alati tekib tsükkel.

2. *(Indrek Zolk)*

Lisalahendus. Olgu positiivsete arvude summa A^+ ja negatiivsete arvude summa A^-. Ülesande tingimuste põhjal $A^+ + A^- = 0$ ja $A^+ - A^- = 1$, millest saame, et $A^+ = \frac{1}{2}$ ning $A^- = -\frac{1}{2}$.

Avaldises $a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n$ positiivsete arvude kordajaid suurendades ja negatiivsete arvude kordajaid vähendades saab selle avaldise väärtus ainult suureneda. Seega

$$a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n \leqslant n \cdot A^+ + 1 \cdot A^- = \frac{n-1}{2}.$$

Analoogiliselt, positiivsete arvude kordajaid vähendades ja negatiivsete arvude kordajaid suurendades saab antud avaldise väärtus ainult kahaneda. Seega

$$a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n \geqslant 1 \cdot A^+ + n \cdot A^- = -\frac{n-1}{2}.$$

Kokkuvõttes

$$|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n| \leqslant \frac{n-1}{2},$$

mott.

Järgnevas skeemis toodud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et $A^+ = \dfrac{1}{2}$ ja $A^- = -\dfrac{1}{2}$: 2 p

  Sealhulgas:
  - Näidatud, et $|A^+| = |A^-|$: *1 p*
- Näidatud, et $a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n \leqslant nA^+ + A^- = \dfrac{n-1}{2}$ ning $a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n \geqslant A^+ + nA^- = -\dfrac{n-1}{2}$: 5 p

  Sealhulgas:
  - Näidatud ainult üks nimetatud võrratustest: *3 p*

Kui töö ei saanud üldjuhu lahendamise eest punkte, anti 1 punkt juhul, kui ülesanne oli täielikult lahendatud vähemalt ühe *konkreetse* n korral.

Ainult konkreetsete arvude a_k (näiteks $a_k \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{n}\right\}$ vms) korral lahendamise eest punkte ei antud.

3. *(Heiki Niglas)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Näidatud, et punktid C, F, D ja G asuvad ühel ringjoonel: 4 p

4. *(Raul Kangro)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Konkreetse tabeli mõõtme korral on toodud tõestus, mis kehtib suvaliste tabelis olevate arvude korral: 1 p
- On idee, mis viiks lahenduseni, kuid puudulikud põhjendused m-ist väiksemate arvude kokkulugemisel ja võrratuse tõestus: 3 p
- Korrektselt põhjendatud skeem m-ist väiksemate arvude kokkulugemiseks, kuid vigane esitus valemina ja seega vale võrratuse tõestamine: 4 p
- Korrektne lahendus, kuid lüngad põhjendustes: 5 p
- Korrektne lahendus väheoluliste pisivigadega: 6 p
- Täislahendus: 7 p

5. *(Jaan Vajakas)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et $n \in \{3, 4, 6, 12\}$ korral tükeldus on võimalik: 2 p

  Sealhulgas:
  - Konstrueeritud kolmnurga, ruudu ja kuusnurga tükeldus: *1 p*
  - Konstrueeritud kaksteistnurga tükeldus: *1 p*
- Näidatud, et $n \in \{3, 4, 6, 12, 30\}$: 3 p

  Sealhulgas:
  - Idee vaadelda hulknurga nurka kahe nurga summana: *1 p*

    - Jõutud järelduseni, et korrapärase n-nurga nurka saab kahe korrapärase hulknurgaga täita vaid $n \in \{6, 12, 30\}$ korral: *1 p*
    - Tõestatud, et $n = 5$ ja $n \geqslant 7$ korral korrapärase n-nurga nurka ühe korrapärase hulknurgaga katta ei saa: *1 p*
- Näidatud, et $n \neq 30$: 2 p

  Sealhulgas:
    - Tõestatud, et 30-nurga nurga täitvad kolmnurk ja viisnurk peavad kumbki katma terve 30-nurga külje: *1 p*
    - Näidatud, et eeltoodud olukorras tekib vastuolu: *1 p*

Kahjuks ei olnud üheski töös tõestatud, et 30-nurga katmisel peavad 30-nurga nurga täitvad kolmnurk ja viisnurk kumbki katma terve 30-nurga külje. Seetõttu täispunkte ei saadud. Samuti oli tihti jäänud tõestamata, et $n = 5$ ja $n \geqslant 7$ korral korrapärase n-nurga nurka ühe korrapärase hulknurgaga katta ei saa.

Hindamisskeemid

1. *(Kalle Kaarli)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Korrektne lahendus, õige vastus: 7 p
- Korrektne lahendus, kuid tõenäoliselt hajameelsusest tingitud vale vastus: 6 p
- Tõestatud $n \leqslant 14$ ning ka oluline osa võrratusest $n \geqslant 14$: 5 p
- Tõestatud $13 \leqslant n \leqslant 14$: 5 p
- Tõestatud $n \leqslant 14$: 2 p
- Vastuseni pole jõutud või jäme arvutusviga on muutnud lahenduse mõttetuks: 0 p

Ülesandest oli õigesti aru saadud. Enamus leidis, et 14 liidetavast piisab. Et 14 on vähim võimalus, suutsid näidata korrektselt vähesed, kuid mõned ka variantide läbivaatamisega. Paljudel juhtudel esines variantide läbivaatamisel olulisi puudusi.

2. *(Mart Abel)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud võrratus $K > \dfrac{4}{243}$: 3 p

  Sealhulgas žürii lahenduse 3 järgi:
  - Toodud näide arvudest x_1, x_2, x_3, x_4, mille korral $K = \dfrac{4}{243}$: *1 p*
  - Tõestatud, et toodud näite korral ei saavutata maksimumi: *2 p*
- Tõestatud võrratus $K < \dfrac{1}{27}$: 4 p

  Sealhulgas žürii lahenduse 1 järgi:
  - Saadud ja põhjendatud $K < (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)$: *2 p*
  - Sellest hinnangust tuletatud vajalik võrratus: *2 p*

  Sealhulgas žürii lahenduse 2 järgi:
  - Näidatud, et maksimum saavutatakse, kui $x_1 = 0, x_4 = 1$ ja x_2 ning x_3 paiknevad $\dfrac{1}{2}$ suhtes sümmeetriliselt: *2 p*
  - Sellest lähtuvalt nõutud võrratus tuletatud: *2 p*

Väide (põhjendusega või ilma), et arvud peavad olema paarikaupa erinevad ja üks neist peab olema 1, teine 0, eraldi punkte ei andnud.

3. *(Oleg Košik)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tähelepanek, et $R_1 + R_2 = \frac{1}{2}|C_1C_2|$ jne: 1 p
- Osa a) lahendus: 3 p
- Osa b) lahendus: 3 p

Ainult kontrolli eest, et võrdkülgse kolmnurga puhul võrdub c_1, c_2 ja c_3 raadiuste summa veerandiga kolmnurga $C_1C_2C_3$ ümbermõõdust, punkte ei antud.

4. *(Kaie Kubjas)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

Skeem 1.

- Leitud iga rea ja veeru summa 15: 1 p
- Märgatud, et arv 9 kuulub täpselt kahte arvude kolmikusse, mille summa on 15: 2 p
- Näidatud, et pärast arvu 9 ning teda sisaldava rea ning veeru elementide sisestamist on kõik ülejäänud maagilise ruudu elemendid fikseeritud: 2 p
- Eelnevale tuginedes tõestatud ülesande väide: 2 p

Skeem 2.

- Leitud iga rea ja veeru summa 15: 1 p
- Märgatud, et kokku on kaheksa arvude kolmikut, mille summa on 15: 1 p
- Näidatud, et neist arvude kolmikutest on võimalik moodustada kaks kolmeliikmelist gruppi, nii et ühe grupi kõik üheksa elementi on erinevad: 2 p
- Eelnevale tuginedes tõestatud ülesande väide: 3 p

Punkte ei antud selle eest, kui oli näidatud, et ridade ja veergude vahetamine, pööramine ning peegeldamine teisendavad maagilise ruudu maagiliseks ruuduks.

5. *(Ahti Peder)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Aritmeetilise jada summa avaldamine esimese liikme, liikmete arvu ja vahe kaudu: 1 p
- Osa a) lahendus: 3 p
- Osa b) lahendus: 3 p

Paljudes lahendustes nähti ülemäärast vaeva triviaalsete järelduste detailse põhjendamisega.