Piirkonnavoor 2013

Ülesanded 1
- 7. klass . . . 1
- 8. klass . . . 3
- 9. klass . . . 5
- 7. klass . . . 7
- 8. klass . . . 8
- 9. klass . . . 9
- 10. klass . . . 10
- 11. klass . . . 11
- 12. klass . . . 12

Ülesanded vene keeles 13
- 7 класс . . . 13
- 8 класс . . . 15
- 9 класс . . . 17
- 7 класс . . . 19
- 8 класс . . . 20
- 9 класс . . . 21
- 10 класс . . . 22
- 11 класс . . . 23
- 12 класс . . . 24

Lahendused 25
- 7. klass . . . 25
- 8. klass . . . 27
- 9. klass . . . 30
- 7. klass . . . 33
- 8. klass . . . 35
- 9. klass . . . 37
- 10. klass . . . 40
- 11. klass . . . 44
- 12. klass . . . 48

Hindamisjuhised 53
- Hindamisjuhised . . . 53
- 7. klass . . . 55
- 8. klass . . . 56
- 9. klass . . . 57
- 7. klass . . . 58
- 8. klass . . . 59
- 9. klass . . . 61
- 10. klass . . . 63
- 11. klass . . . 65
- 12. klass . . . 67

Kontrollijate kommentaarid 70
- Kommentaarid . . . 70
- 7. klass . . . 71
- 8. klass . . . 73
- 9. klass . . . 75
- 10. klass . . . 77
- 11. klass . . . 79
- 12. klass . . . 81

Eesti LX matemaatikaolümpiaad

19. jaanuar 2013 | Piirkonnavoor | **7. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia paaritute arvude suurim võimalik arv viie naturaalarvu a, b, c, d ja e seas, kui kehtib võrdus

$$a \cdot b \cdot c + d \cdot e = 2013.$$

....

2. Milline järgmisest kuuest murrust on suuruselt arvule 1 kõige lähemal?

$$0{,}54 \qquad 1{,}45 \qquad \frac{4}{5} \qquad \frac{5}{4} \qquad 1\frac{4}{5} \qquad \frac{55}{44}$$

....

3. Olümpiaadil osalenud 32 õpilase lõpptulemuste seas oli 24 erinevat punktisummat. Leia suurim võimalik õpilaste arv, kes võisid oma töö eest saada ühesuguse punktisumma.

....

4. On teada, et Karl on vanem Tiidust, aga noorem Piretist. Elisa on vanem Tiidust ja Viktor on noorem Annikist. Karl on vanem Elisast ja Piret on noorem Viktorist. Kes kuuest sõbrast on kõige vanem?

....

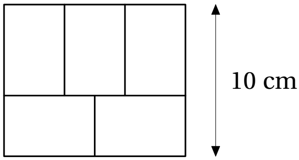
5. Positiivne täisarv m jagub arvuga 4 ja arv $m+1$ jagub arvuga 5. Leia arvu $m+2$ viimane number.

....

6. Ringjoone keskpunktist O lähtub 3 kiirt, mis jaotavad ringi kolmeks sektoriks, mille nurgad on suurustega α, β ja γ. Nurkade α ja β summa on sirgnurk, nurkade β ja γ summa on 200°. Kui suur on α ja γ summa?

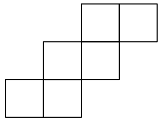
....

7. Ristkülik laiusega 10 cm jaotatakse 5 võrdseks väikseks ristkülikuks nagu joonisel näidatud. Kui suur on ühe väikese ristküliku pindala?



. . . .

8. Kuubi pinnalaotuse ümbermõõt on 70 cm. Kui suur on selle kuubi ruumala?



. . . .

9. Nööri pikkus on täisarv meetrit. Nöör lõigati juppideks pikkusega 35 cm. Leia terve nööri vähim võimalik pikkus.

. . . .

10. Kuup on kokku pandud 27 ühikkuubist. Kuubist eemaldatakse kõik kuubi tippudes asuvad ühikkuubid. Mitu tahku on saadaval kehal?

. . . .

Eesti LX matemaatikaolümpiaad

19. jaanuar 2013 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia naturaalarv x, mille korral $x^2 = 3102 - 2013$.

. . . .

2. Leia paarisarvude suurim võimalik arv seitsme naturaalarvu a, b, c, d, e, f ja g seas, kui kehtib võrdus

$$a \cdot b \cdot c \cdot d + e \cdot f \cdot g = 12345.$$

. . . .

3. Leia arv a, kui

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}.$$

. . . .

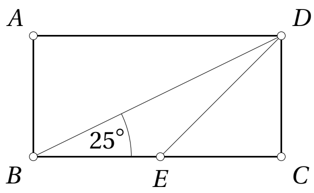
4. Leia suurim kahekohaline naturaalarv, mis annab jagamisel arvuga 2 jäägi 1 ja jagamisel arvuga 3 jäägi 2.

. . . .

5. Kolm poega ja üks tütar jaotasid vanematelt saadud taskuraha omavahel võrdselt. Kui selle raha oleksid ainult poisid jaotanud omavahel võrdselt, oleks igaüks neist saanud 3 eurot enam. Kui suur oli vanematelt saadud taskuraha?

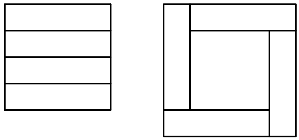
. . . .

6. Ristkülikus $ABCD$ on $\angle CBD = 25^\circ$. Küljel BC võetakse punkt E nii, et $|CE| = |CD|$. Leia nurga BDE suurus.



. . . .

7. Ruut jaotatakse neljaks võrdseks ristkülikuks, millest moodustatakse joonisel näidatud viisil ruudukujuline raam. On teada, et raami sisse jääva tühja ruudu pindala on 36 cm^2. Leia algse ruudu pindala.

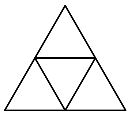


. . . .

8. Tasandil paiknevad kaks võrdset teineteist lõikavat ringjoont keskpunktidega A ja B nii, et nende ringjoonte lõikepunktid lõiguga AB jaotavad selle lõigu kolmeks võrdseks osaks. Lõigu AB pikkus on 12 cm. Leia ühe ringjoone täpne ümbermõõt.

. . . .

9. Võrdkülgne kolmnurk on jaotatud neljaks võrdseks kolmnurgaks joonisel näidatud viisil. Iga väike kolmnurk värvitakse kas punaseks või mustaks. Mitu erinevalt värvitud suurt kolmnurka on nii võimalik saada? (Kaks värvitud suurt kolmnurka loeme samaks, kui üks on saadud teisest pööramise teel.)



. . . .

10. Kuup on kokku pandud 125 ühikkuubist. Kuubi iga serva keskelt eemaldatakse üks ühikkuup. Mitu tahku on saadaval kehal?

. . . .

Eesti LX matemaatikaolümpiaad

19. jaanuar 2013 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia suurim algarv, millega jagub vahe $3012 - 2013$.

....

2. Leia paaritute arvude suurim võimalik arv seitsme naturaalarvu a, b, c, d, e, f ja g seas, kui kehtib võrdus

$$(a+b)\cdot(c\cdot d+(e+f)\cdot g)=12345.$$

....

3. Positiivsete arvude a, b ja c korral on $a\cdot b=3$, $b\cdot c=27$ ja $c\cdot a=16$. Leia arv c.

....

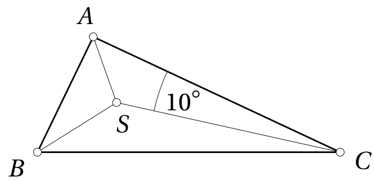
4. Leia vähim kolmekohaline naturaalarv, mis annab jagamisel arvuga 2 jäägi 1, jagamisel arvuga 3 jäägi 2 ja jagamisel arvuga 5 jäägi 4.

....

5. Kausis on 100 Mari lemmikkommi „Oravake“ ja 50 Jüri lemmikkommi „Tallinn“. Nad võivad kordamööda võtta kausist ühe kommi kaupa, kuni üks neist saab kätte 5 oma lemmikkommi. Mari alustab kommide võtmist. Leia suurim võimalik kommide arv, mida sellistel tingimustel on võimalik lastel kahe peale kokku kausist võtta.

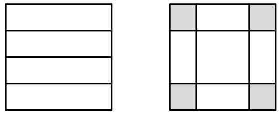
....

6. Kolmnurga ABC nurgapoolitajad lõikuvad punktis S. Leia nurga ASB suurus, kui $\angle ACS = 10^\circ$.



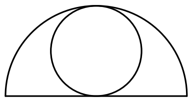
. . . .

7. Ruut jaotatakse neljaks võrdseks ristkülikuks, millest moodustatakse joonisel näidatud viisil ruudukujuline raam, nii et naaberristkülikud kattuvad otsapidi (joonisel on kattuvad osad värvitud halliks). On teada, et raami sisse jääva tühja ruudu pindala on 10 cm^2. Leia algse ruudu pindala.



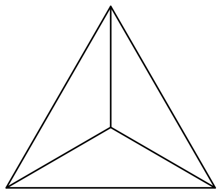
. . . .

8. Poolringi sisse joonestatakse suurim võimalik ring. Selle ringi ümbermõõt on 2 meetrit. Leia poolringi täpne pindala.



. . . .

9. Võrdkülgne kolmnurk on jaotatud kolmeks võrdseks osaks joonisel näidatud viisil. Iga osa värvitakse kas punaseks, roheliseks või mustaks (erinevad osad võivad olla värvitud ka sama värviga). Mitu erinevalt värvitud suurt kolmnurka on nii võimalik saada? (Kaks värvitud suurt kolmnurka loeme samaks, kui üks on saadud teisest pööramise teel.)



. . . .

10. Kuup on kokku pandud 125 ühikkuubist. Kuubi iga tahu keskelt eemaldatakse üks ühikkuup. Mitu tahku on saadaval kehal?

. . . .

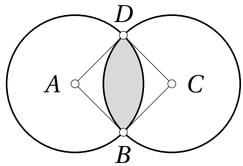
Eesti LX matemaatikaolümpiaad

19. jaanuar 2013 Piirkonnavoor **7. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 2 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Perekond Ploomiste lemmikpuuviljad on ploomid, mida kõik söövad iga päev. Mõlemad lapsed söövad alati võrdse arvu ploome. Mamma Ploomiste sööb ploome kaks korda rohkem kui kaks last kokku. Papa Ploomiste ei söö kunagi üle 50% ploomidest, kuid sööb siiski alati rohkem kui mamma Ploomiste. Mitu ploomi sõi papa Ploomiste, kui kokku söödi 75 ploomi? (Sama ploomi mitme inimese vahel ei jagata.)

2. Kaks ringjoont raadiusega 4 cm ning keskpunktidega A ja C lõikuvad punktides B ja D. Nelinurk $ABCD$ on ruut. Leia ringide ühise osa (joonisel värvitud tumedaks)



a) täpne ümbermõõt,

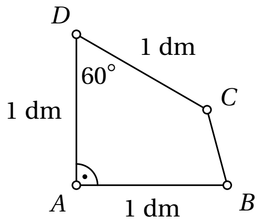
b) täpne pindala.

3. Võistkondlikul lauahoki paarismängu turniiril esindasid klasse 7A ja 7B neljaliikmelised võistkonnad. Üks liige võistkonnast oli valitud kapteniks. Kummaski võistkonnas moodustati mängijatest kõikvõimalikud paarid ja ühe võistkonna iga paar mängis ühe mängu teise võistkonna iga paariga. Iga mäng kestis seni, kuni üks võistkondadest sai oma esimese värava. Turniiri lõpul selgus, et 7A klass jõudis väravani kõigis neis ja ainult neis mängudes, kus võistles nende kapten. Millise skooriga lõppes see turniir?

II osa. *Lahendamisaega on 2 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. On antud kuus algarvu a, b, c, d, e ja f, mille korrutis on paarisarv. On teada, et arv c on suurem arvust d, kuid väiksem arvust b. Arv e on suurem arvust d ja arv f on väiksem arvust a. Arv c on suurem kui arv e, aga arv b on väiksem kui arv f. Leia need arvud, kui suurim neist on 23 ning arvud $a+d$ ja $a-d$ ei jagu ühegagi antud algarvudest.

2. Nelinurgas $ABCD$ on $|AB| = |CD| = |DA| = 1$ dm ning $\angle DAB = 90^\circ$ ja $\angle ADC = 60^\circ$ (vt joonist). Leia kolmnurga BCD nurkade suurused.



3. Rita uuris oma eksperimendi käigus erinevate lilleväetiste mõju taimede kasvule. Mõõtmisi tehti täpsusega 1 cm. Viimasel mõõtmisel selgus, et kõik taimed olid erineva pikkusega, viie lühema taime keskmine pikkus oli 32 cm ja ülejäänud viie taime keskmine pikkus oli 42 cm.

a) Milline oli kõigi 10 taime keskmine pikkus?

b) Leia suurim võimalik kõige pikema taime mõõdetud pikkus.

Eesti LX matemaatikaolümpiaad

19. jaanuar 2013 Piirkonnavoor **9. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 4 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Positiivse täisarvu a kohta on teada, et arvudest $2a+1$, $2a+3$, $2a+5$ vähemalt üks jagub arvuga $a+1$, vähemalt üks jagub arvuga $a+3$ ja vähemalt üks jagub arvuga $a+5$. Leia kõik võimalused, mis arv saab olla a.

2. Arvud x, y ja r (mis ei tarvitse olla täisarvud) rahuldavad tingimust

$$x^2 + y^2 = 2x + 2y + r.$$

Tõesta, et $r \geqslant -2$.

3. Nelinurga $ABCD$ küljed AB ja CD on paralleelsed. Nelinurga sees leidub selline punkt Q, et kolmnurkade ABQ, BCQ, CDQ ja DAQ pindalad on võrdsed. Leia kõik võimalused, milline võib olla külgede AB ja CD pikkuste suhe.

4. Ümmarguse tordi servale mahub kuni 100 küünalt. Kas on võimalik selle tordi servale paigutada 9 küünalt nii, et ükskõik kuidas seda torti nelja diameetri abil kaheksaks võrdseks osaks jagada (nii et ükski lõige ei läbi ühtegi küünalt), leiduks alati üks torditükk, millel on vähemalt 5 küünalt?

Eesti LX matemaatikaolümpiaad

19. jaanuar 2013 Piirkonnavoor **10. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Viimasel õppeveerandil oli Juku hinnete hulgas 20% neljasid ja 30% kolmesid; ülejäänud hinded olid kahed ja viied. Juku kõigi hinnete aritmeetiline keskmine oli seejuures täpselt 3. Mitu protsenti Juku hinnetest olid kahed ja mitu protsenti viied?

2. Leia võrrandi

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$

kõik reaalarvulised lahendid.

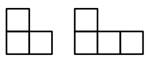
3. Leia vähim naturaalarv n, mille korral mistahes n täisarvu ruudu seas leidub kaks sellist, mille vahe jagub 10-ga.

4. Tõesta, et

$$\frac{3}{2} < \left(1 + \frac{1}{1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{2013^2}\right) < \frac{5}{3}.$$

5. Tasandil on antud ringjooned c_1 ja c_2 keskpunktidega vastavalt A ja B, kusjuures ringjoon c_1 läbib punkti B, punkt A aga asub väljaspool ringjoonega c_2 piiratud ala. Punktist A tõmmatud kiir puutub ringjoont c_2 punktis T ja lõikab ringjoont c_1 punktis C. Leia nurga TBC suurus, kui $|AC| = 2|BT|$.

6. Ruudustik mõõtmetega 3×2013 kaetakse täielikult kolmest ja neljast ühikruudust koosnevate nurgikutega (vt joonist).



Nurgikuid võib pöörata ja ümber keerata, kuid ükski nurgik ei tohi ulatuda üle ruudustiku serva ega katta teist nurgikut. Leia vähim võimalik neljast ühikruudust koosnevate nurgikute arv kattes.

Eesti LX matemaatikaolümpiaad

19. jaanuar 2013 Piirkonnavoor **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik reaalarvud x, mille korral kehtib võrdus

$$\big||x-1|+1\big| = x\,.$$

2. Korrapärase kuusnurga ümbermõõt on x sentimeetrit ja pindala x ruutsentimeetrit. Leia arv x.

3. Leia kõik sellised täisarvud n, mille korral $\sqrt{n+2013}-\sqrt{n}$ on täisarv.

4. Nurk α rahuldab tingimust $\cos\alpha = \tan\alpha$. Leia avaldise $\sin\alpha$ kõik võimalikud väärtused.

5. Tasandil on antud kolmnurk ABC. Punktid B_1, B_2, C_1, C_2 valitakse nii, et $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{B_2B}$ ning $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{C_2C}$. Olgu D lõikude B_1C_2 ja B_2C_1 lõikepunkt. On teada, et sirged AD ja BC on risti. Tõesta, et kolmnurk ABC on võrdhaarne.

6. Lollidemaal kasvab puu, mille otsas on n kuld- ja m hõbemünti (m ja n on positiivsed täisarvud). Korraga tohib puu otsast noppida 2 münti; kui need on ühesugused, siis kasvab asemele 1 kuldmünt, kui aga erinevad, siis 1 hõbemünt.

a) Milline on viimane puu otsa alles jääv münt?

b) Üks kuldmünt on väärtuselt võrdne 5 hõbemündiga. Milline on suurim rahasumma (hõbemüntides), mida on võimalik puu otsast koristada?

Eesti LX matemaatikaolümpiaad

19. jaanuar 2013 Piirkonnavoor **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Lahenda võrrand

$$\sin(45^\circ - x) + \sin 45^\circ = \sin(45^\circ + x).$$

2. Koordinaatide alguspunkti läbiv sirge puutub funktsiooni $y = \ln x$ graafikut. Leia puutepunkti koordinaadid.

3. Leia kõik täisarvude paarid (u, v), mille korral $u \neq v$ ja võrrandisüsteemil

$$\begin{cases} x^2 + 2ux + v^2 = 1 \\ x^2 + 2vx + u^2 = 1 \end{cases}$$

leidub täisarvuline lahend.

4. Leia võrrandi

$$3^{|2x+1|} = \sin^2(\pi x)$$

kõik reaalarvulised lahendid.

5. Kaks ringjoont raadiustega r_1 ja r_2 puutuvad üksteist väliselt, kusjuures $r_1 < r_2$. Tõesta, et nende ringjoonte kolme ühise puutuja omavahelised lõikepunktid on mingi võrdkülgse kolmnurga tipud parajasti siis, kui $r_2 = 3r_1$.

6. On antud ruudustik positiivsete täisarvuliste mõõtmetega $m \times n$. Kaks mängijat värvivad kordamööda ruute. Ühel käigul tohib värvida ühe värvimata ruudu või kaks ühise küljega värvimata ruutu. Võidab mängija, kelle käiguga saab ruudustik üleni värvitud. Kummal mängijal on võitev strateegia?

LX Олимпиада Эстонии по математике

19 января 2013 г. Региональный тур **7 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти наибольшее возможное количество нечётных чисел среди пяти натуральных чисел a, b, c, d и e, если действует равенство

$$a \cdot b \cdot c + d \cdot e = 2013.$$

. . . .

2. Какая из следующих шести дробей по величине наиболее близка к числу 1?

$$0{,}54 \qquad 1{,}45 \qquad \frac{4}{5} \qquad \frac{5}{4} \qquad 1\frac{4}{5} \qquad \frac{55}{44}$$

. . . .

3. Среди результатов участвовавших на олимпиаде 32 учеников оказались 24 различные суммы баллов. Найти наибольшее возможное число учеников, которые могли за свою работу набрать одинаковую сумму баллов.

. . . .

4. Известно, что Карл старше Тимура, но младше Полины. Елена старше Тимура, а Виктор младше Анны. Карл старше Елены, а Полина младше Виктора. Кто из шести друзей самый старший?

. . . .

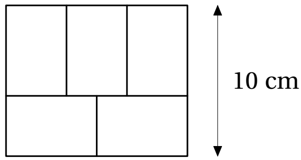
5. Положительное целое число m делится на 4, а число $m + 1$ делится на 5. Найти последнюю цифру числа $m + 2$.

. . . .

6. Из центра O окружности проведены 3 луча, которые делят круг на три сектора, величины углов которых равны α, β и γ. Сумма углов α и β является развёрнутым углом, а сумма углов β и γ равна 200°. Какова величина суммы углов α и γ?

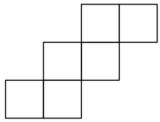
. . . .

7. Прямоугольник шириной 10 см поделён на 5 равных маленьких прямоугольников так, как показано на рисунке. Чему равна площадь одного маленького прямоугольника?



. . . .

8. Периметр развёртки куба равен 70 см. Чему равен объём этого куба?



. . . .

9. Длина верёвки равна целому числу метров. Всю эту верёвку разрезали на кусочки длиной 35 см каждый. Найти наименьшую возможную длину всей верёвки.

. . . .

10. Куб составили из 27 единичных кубиков. Затем из куба забрали все единичные кубики, находившиеся в вершинах куба. Сколько граней оказалось у полученного тела?

. . . .

LX Олимпиада Эстонии по математике

19 января 2013 г. Региональный тур **8 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти натуральное число x, при котором $x^2 = 3102 - 2013$.

. . . .

2. Найти наибольшее возможное количество чётных чисел среди семи натуральных чисел a, b, c, d, e, f и g, если действует равенство

$$a \cdot b \cdot c \cdot d + e \cdot f \cdot g = 12345.$$

. . . .

3. Найти число a, если

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}.$$

. . . .

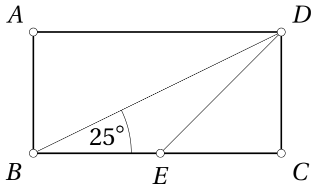
4. Найти наибольшее двузначное натуральное число, которое при делении на 2 даёт в остатке 1, а при делении на 3 даёт в остатке 2.

. . . .

5. Три сына и одна дочь поделили поровну между собой деньги, данные родителями на карманные расходы. Если бы эти деньги поделили поровну между собой только мальчики, то каждый из них получил бы на 3 евро больше. Сколько всего денег дали родители детям на карманные расходы?

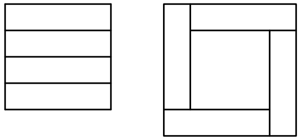
. . . .

6. Дан прямоугольник $ABCD$, в котором $\angle CBD = 25^\circ$. Точку E на стороне BC выбрали так, чтобы $|CE| = |CD|$. Найти величину угла BDE.



. . . .

7. Квадрат разрезали на четыре равных прямоугольника, из которых составили показанную на рисунке рамку квадратной формы. Известно, что площадь образовавшегося внутри рамки пустого квадрата равна 36 см^2. Найти площадь изначального квадрата.

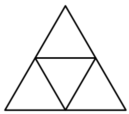


. . . .

8. На плоскости лежат две равные пересекающие друг друга окружности с центрами A и B так, что точки пересечения этих окружностей с отрезком AB делят этот отрезок на три равные части. Длина отрезка AB равна 12 см. Найти точный периметр одной из этих окружностей.

. . . .

9. Равносторонний треугольник поделён на четыре равных треугольника так, как показано на рисунке. Каждый маленький треугольник раскрашивают красным или чёрным цветом. Сколько различных покрашенных больших треугольников таким образом возможно получить? (Два раскрашенных больших треугольника считаем одинаковыми, если один из другого можно получить при помощи поворота.)



. . . .

10. Куб составили из 125 единичных кубиков. Затем из середины каждого ребра куба забрали один единичный кубик. Сколько граней оказалось у полученного тела?

. . . .

LX Олимпиада Эстонии по математике

19 января 2013 г. Региональный тур **9 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти наибольшее простое число, на которое делится разность $3012 - 2013$.

. . . .

2. Найти наибольшее возможное количество нечётных чисел среди семи натуральных чисел a, b, c, d, e, f и g, если действует равенство

$$(a+b)\cdot(c\cdot d+(e+f)\cdot g)=12345.$$

. . . .

3. При положительных числах a, b и c действуют равенства $a\cdot b=3$, $b\cdot c=27$ и $c\cdot a=16$. Найти число c.

. . . .

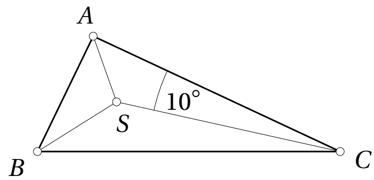
4. Найти наименьшее трёхзначное натуральное число, которое при делении на 2 даёт в остатке 1, при делении на 3 даёт в остатке 2, а при делении на 5 даёт в остатке 4.

. . . .

5. В чаше лежат 100 любимых конфет Маши „Белочка“ и 50 любимых конфет Юры „Таллинн“. Они могут поочерёдно брать из чаши по одной конфете до тех пор, пока у одного из них не окажется 5 его любимых конфет. Первой берёт конфету Маша. Найти наибольшее возможное число конфет, которое при таких условиях ребята могут на двоих забрать из чаши.

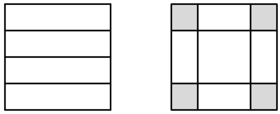
. . . .

6. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке S. Найти величину угла ASB, если $\angle ACS = 10^\circ$.



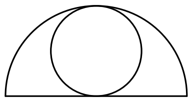
. . . .

7. Квадрат разрезали на четыре равных прямоугольника, из которых составили показанную на рисунке рамку квадратной формы так, чтобы соседние прямоугольники накладывались друг на друга по краям (на рисунке области наложения окрашены серым цветом). Известно, что площадь образовавшегося внутри рамки пустого квадрата равна 10 см^2. Найти площадь изначального квадрата.



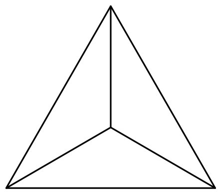
. . . .

8. Внутри полукруга нарисован наибольший возможный круг. Периметр этого круга равен 2 метрам. Найти точную площадь полукруга.



. . . .

9. Равносторонний треугольник поделён на три равные части так, как показано на рисунке. Каждую часть раскрашивают красным, зелёным или чёрным цветом (различные части могут быть раскрашены одним и тем же цветом). Сколько различных раскрашенных больших треугольников таким образом возможно получить? (Два раскрашенных больших треугольника считаем одинаковыми, если один из другого можно получить при помощи поворота.)



. . . .

10. Куб составили из 125 единичных кубиков. Затем из середины каждой грани куба забрали один единичный кубик. Сколько граней оказалось у полученного тела?

. . . .

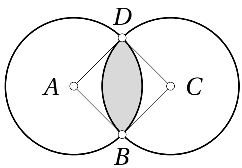
LX Олимпиада Эстонии по математике

19 января 2013 г. Региональный тур **7 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 2 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Любимыми фруктами семьи Сливовичей являются сливы, которые все кушают каждый день. Оба ребёнка этой семьи всегда кушают равное количество слив. Мама Сливович кушает в два раза больше слив, чем оба ребёнка вместе. А папа Сливович никогда не кушает больше 50% всех слив, но всегда съедает их больше, чем мама Сливович. Сколько слив сегодня съел папа Сливович, если всего было съедено 75 слив? (Одну и ту же сливу не делят между несколькими людьми.)

2. Две окружности радиуса 4 см с центрами в точках A и C пересекаются в точках B и D. Четырёхугольник $ABCD$ является квадратом. Найти



а) точный периметр,

б) точную площадь

общей части кругов (на рисунке окрашена в тёмный цвет).

3. На турнире по настольному хоккею проводились парные игры, в которых участвовали команды из четырёх человек 7A и 7B классов. Один из представителей каждой команды был выбран капитаном. Из игроков обеих команд были составлены всевозможные пары, и каждая пара одной команды сыграла одну игру с каждой парой другой команды. Каждая игра длилась до одного гола. В конце турнира оказалось, что команда 7A класса забивала гол в тех и только в тех играх, в которых принимал участие их капитан. С каким счётом завершился этот турнир?

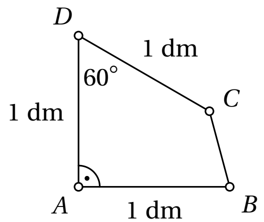
LX Олимпиада Эстонии по математике

19 января 2013 г. Региональный тур **8 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 2 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Даны шесть простых чисел a, b, c, d, e и f, произведение которых является чётным. Известно, что число c больше числа d, но меньше числа b. Число e больше числа d, а число f меньше числа a. Число c больше числа e, а число b меньше числа f. Найти все эти числа, если наибольшее из них равно 23, а числа $a+d$ и $a-d$ не делятся ни на одно из данных простых чисел.

2. О четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $|AB| = |CD| = |DA| = 1$ дм, $\angle DAB = 90^\circ$ и $\angle ADC = 60^\circ$ (см. рисунок). Найти величины углов треугольника BCD.



3. Рита в ходе своего эксперимента исследовала влияние различных цветочных удобрений на рост растений. Измерения она проводила с точностью до 1 см. При последнем измерении выяснилось, что все растения были различной длины, средняя длина пяти самых коротких растений была равна 32 см, а средняя длина пяти оставшихся растений была равна 42 см.

а) Чему была равна средняя длина всех 10 растений?

б) Найти наибольшую возможную длину, которую Рита могла получить при измерении самого длинного растения.

LX Олимпиада Эстонии по математике

19 января 2013 г. Региональный тур **9 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 4 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. О положительном целом числе a известно, что по крайней мере одно из чисел $2a+1$, $2a+3$, $2a+5$ делится на число $a+1$, по крайней мере одно из них делится на число $a+3$ и по крайней мере одно из них делится на число $a+5$. Найти все возможные значения числа a.

2. Числа x, y и r (не обязательно целые) удовлетворяют условию

$$x^2 + y^2 = 2x + 2y + r.$$

Доказать, что $r \geqslant -2$.

3. Стороны AB и CD четырёхугольника $ABCD$ параллельны. Внутри этого четырёхугольника существует такая точка Q, что площади треугольников ABQ, BCQ, CDQ и DAQ равны. Найти все возможные значения отношения длин сторон AB и CD.

4. С краю торта круглой формы можно расположить до 100 свечек. Возможно ли с краю этого торта расположить 9 свечек так, что при любом делении этого торта четырьмя диаметрами на восемь равных частей (так чтобы ни один разрез не проходил ни через одну свечку) всегда бы нашёлся один кусочек торта, на котором было бы по крайней мере 5 свечек?

LX Олимпиада Эстонии по математике

19 января 2013 г. Региональный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. В последней учебной четверти среди оценок Юры было 20% четвёрок и 30% троек; остальные оценки были двойки и пятёрки. Причём арифметическое среднее всех оценок Юры оказалось равно ровно 3. Сколько процентов двоек и сколько процентов пятёрок было среди всех оценок Юры?

2. Найти все действительные решения уравнения

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$

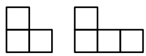
3. Найти наименьшее натуральное число n, при котором среди любых n квадратов целых чисел найдутся два таких, разность которых делится на 10.

4. Доказать, что

$$\frac{3}{2} < \left(1 + \frac{1}{1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{2013^2}\right) < \frac{5}{3}.$$

5. На плоскости даны окружности c_1 и c_2, центры которых соответственно A и B, причём окружность c_1 проходит через точку B, а точка A лежит вне области, ограниченной окружностью c_2. Проведённый из точки A луч касается окружности c_2 в точке T и пересекает окружность c_1 в точке C. Найти величину угла TBC, если $|AC| = 2|BT|$.

6. Клетчатая доска размером 3×2013 полностью покрывается уголками, состоящими из трёх и четырёх клеток (см. рисунок). Уголки можно поворачивать и переворачивать, но ни один из них не может заходить за края доски и покрывать другой уголок. Найти, какое наименьшее возможное количество уголков, состоящих из четырёх клеток, можно использовать для полного покрытия данной доски.



LX Олимпиада Эстонии по математике

19 января 2013 г. Региональный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все действительные числа x, при которых действует равенство

$$\big||x-1|+1\big| = x\,.$$

2. Периметр правильного шестиугольника равен x сантиметров, а его площадь равна x квадратных сантиметров. Найти число x.

3. Найти все такие целые числа n, при которых $\sqrt{n+2013}-\sqrt{n}$ является целым числом.

4. Угол α удовлетворяет условию $\cos\alpha = \tan\alpha$. Найти все возможные значения выражения $\sin\alpha$.

5. На плоскости дан треугольник ABC. Точки B_1, B_2, C_1, C_2 выбирают так, чтобы $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{B_2B}$ и $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{C_2C}$. Пусть D – точка пересечения отрезков B_1C_2 и B_2C_1. Известно, что прямые AD и BC перпендикулярны. Доказать, что треугольник ABC является равнобедренным.

6. В стране дураков растёт дерево, на ветвях которого n золотых и m серебряных монет (m и n – положительные целые числа). За один раз разрешается сорвать с дерева 2 монеты; если они одинаковые, то вместо них вырастает 1 золотая монета, а если разные, то 1 серебряная монета.

а) Какой окажется последняя монета на этом дереве?

б) Ценность одной золотой монеты равна ценности 5 серебряных монет. Какую наибольшую денежную сумму (в серебряных монетах) можно собрать с этого дерева?

LX Олимпиада Эстонии по математике

19 января 2013 г. Региональный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Решить уравнение

$$\sin(45^\circ - x) + \sin 45^\circ = \sin(45^\circ + x).$$

2. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = \ln x$. Найти координаты точки касания.

3. Найти все пары целых чисел (u, v), при которых $u \neq v$ и у системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2ux + v^2 = 1 \\ x^2 + 2vx + u^2 = 1 \end{cases}$$

найдётся решение в целых числах.

4. Найти все действительные решения уравнения

$$3^{|2x+1|} = \sin^2(\pi x).$$

5. Две окружности с радиусами r_1 и r_2 касаются друг друга внешним образом, причём $r_1 < r_2$. Доказать, что точки пересечения трёх общих касательных этих окружностей являются вершинами некоторого равностороннего треугольника тогда и только тогда, когда $r_2 = 3r_1$.

6. Дана клетчатая доска с положительными целочисленными размерами $m \times n$. Два игрока поочередно раскрашивают её клетки. За один ход разрешается раскрасить либо одну нераскрашенную клетку, либо две нераскрашенные клетки, имеющие общую сторону. Выигрывает тот игрок, после хода которого доска будет полностью раскрашена. У какого игрока имеется выигрышная стратегия?

Eesti LX matemaatikaolümpiaad

19. jaanuar 2013 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa vastused

1. 4.
2. $\frac{4}{5}$.
3. 9.
4. Anniki.
5. 6.
6. 340°.
7. $24\ \text{cm}^2$.
8. $125\ \text{cm}^3$.
9. 7 m.
10. 30.

Lahendused

1. Et kahe korrutise summa 2013 on paaritu, on üks korrutis paaritu ja teine paaris. Paaris korrutises on vähemalt üks tegur paaris. Seega antud viiest arvust peab vähemalt üks olema paaris, ülimalt neli saavad olla paaritud. Neli paaritut arvu on ka võimalik, nt $1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2012 = 2013$.

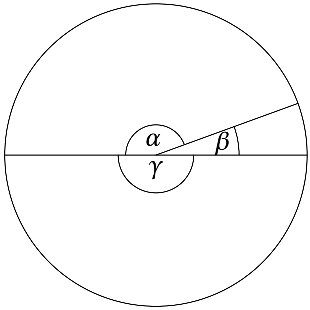
2. $\left|1 - \frac{4}{5}\right| = 0{,}2$, samas kui $\left|1 - \frac{5}{4}\right| = \left|1 - \frac{55}{44}\right| = 0{,}25$ ja teised murrud on ilmselt arvust 1 veel kaugemal.

3. Tingimuste kohaselt saame leida 24 õpilast, kes said kõik erineva punktisumma. Üle jääb 8 õpilast. Kui nad said kõik ühesuguse punktisumma, siis selle punktisumma saajaid on kokku $1 + 8$ ehk 9.

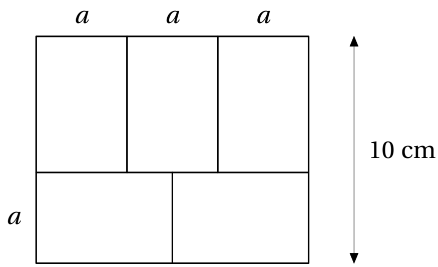
   Teisalt, kui mõni punktisumma esinenuks vähemalt 10 õpilasel, siis ülejäänud 23 erinevat punktisummat pidanuks olema teenitud ülimalt $32 - 10$ ehk 22 õpilase poolt, mis on võimatu.

4. Vastavalt tingimustele on Anniki vanem Viktorist, Viktor on vanem Piretist, Piret on vanem Karlist, Karl on vanem Elisast ja Elisa on vanem Tiidust. Seega vanim neist kuuest on Anniki.

   Märkus. Eeldust, et Karl on vanem Tiidust, ei lähe lahendamisel vaja, sest see järeldub teistest eeldustest (Elisa on vanem Tiidust ning Karl vanem Elisast).



Joonis 1



Joonis 2

5. Et $m+1$ jagub 5-ga, siis $m+1$ lõpeb kas 5-ga või 0-ga. Seega m lõpeb kas 4-ga või 9-ga. Kuna m jagub 4-ga, siis on ta paaris, mistõttu 9-ga lõppeda ei saa. Järelikult m lõpeb 4-ga ja arvu $m+2$ viimane number on 6.

6. Täisringis on 360 kraadi, st $\alpha+\beta+\gamma = 360^\circ$. Et $\alpha+\beta = 180^\circ$, siis $\gamma = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$. Nüüd $\beta+\gamma = 200^\circ$ annab $\beta = 20^\circ$. Järelikult $\alpha = 180^\circ - \beta = 160^\circ$. Kokkuvõttes $\alpha+\gamma = 340^\circ$ (joonis 1).

7. Olgu väikese ristküliku lühema külje pikkus a (joonis 2). Suure ristküliku horisontaalsuunalisest jaotusest saame väikese ristküliku pikema külje pikkuseks $\frac{3a}{2}$. Vertikaalsuunast leiame $a + \frac{3a}{2} = 10$ cm ehk $\frac{5}{2}a = 10$ cm, kust $a = 4$ cm. Seega väikese ristküliku mõõtmed on 4 cm ja 6 cm, mis annab pindalaks 24 cm^2.

8. Pinnalaotuse kontuur koosneb 14 kuubi servast. Seega kuubi serva pikkus on $\frac{70\text{ cm}}{14}$ ehk 5 cm. Kuubi ruumala on siis 125 cm^3.

9. Peame leidma jupi pikkuse vähima täiskordse, mis kujutab endast ühtlasi täisarvu meetreid. Selleks avaldame jupi pikkuse ja meetri mõlemad sentimeetrites ja leiame sentimeetrite arvude vähima ühiskordse. Arvude 35 ja 100 vähim ühiskordne on 700, niisiis on kogu nööri vähim võimalik pikkus 700 cm ehk 7 m.

10. Pindmise ühikkuubi eemaldamisel tekib kehale üks uus tahk eemaldatud ühikkuubi iga varjatud tahu kohta. Kuubi tipus paikneval ühikkuubil on varjatud 3 tahku (3 on näha), tippe on kuubil 8. Kõik algse kuubi 6 tahku jäävad alles (nelja ühikruudu võrra väiksemana), seega tekkival kujundil on $3 \cdot 8 + 6$ ehk 30 tahku.

Eesti LX matemaatikaolümpiaad

19. jaanuar 2013 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa vastused

1. 33.

2. 4.

3. 20.

4. 95.

5. 36 €.

6. 20°.

7. $64\ \text{cm}^2$.

8. 16π cm.

9. 8.

10. 54.

Lahendused

1. Et $x^2 = 3102 - 2013 = 1089 = 3^2 \cdot 11^2$ ja x on naturaalarv, siis $x = 33$.

2. Et kahe korrutise summa 12345 on paaritu, on üks korrutis paaritu ja teine paaris. Paaritus korrutises on kõik tegurid paaritud, paaris korrutises võivad kasvõi kõik tegurid olla paaris. Rohkem paarisarve saame siis, kui paaris on 4 teguriga korrutis. Teisalt, 4 paarisarvu on ka võimalik, nt $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 12329 = 12345$.

3. Et

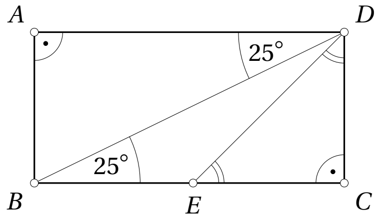
$$\frac{1}{a} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} - \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{1}{20},$$

siis $a = 20$.

4. *Lahendus 1.* Jäägi 1 annavad 2-ga jagades paaritud arvud. Hakkame kahekohalisi paarituid arve suuruse järjekorras alates suurimast läbi vaatama. Arv 99 annab 3-ga jagades jäägi 0 ja arv 97 jäägi 1, seega ei sobi. Arv 95 aga annab 3-ga jagades jäägi 2.

Lahendus 2. Otsitavast 1 võrra suurem arv jagub nii 2-ga kui ka 3-ga, seega 6-ga. Suurim 6-ga jaguv arv, mis pole suurem kui 100, on 96. Järelikult otsitav arv on 95.

5. *Lahendus 1.* Kogu raha jaotub ainult poiste vahel võrdselt, kui tütar jaotab oma osa võrdselt vendade vahel. Et igaüks 3 vennast saaks niimoodi 3 € juurde, pidi tütar saama vanematelt 9 €. Järelikult vanematelt saadud taskuraha kokku oli $4 \cdot 9$ € ehk 36 €.



Joonis 3

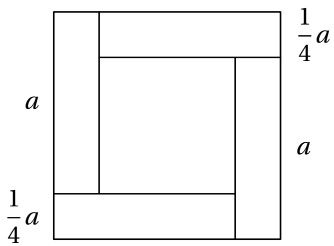
Lahendus 2. Olgu vanematelt saadud taskuraha x. Vastavalt ülesande tingimustele saame võrrandi $\frac{x}{3} = \frac{x}{4} + 3$ €. Siit $x = 36$ €.

6. Põiknurkadest leiame $\angle ADB = \angle CBD = 25^\circ$ (joonis 3; teine võimalus on arvutada kõigepealt $\angle ABD = 90^\circ - \angle EBD = 65^\circ$ ja seejärel $\angle ADB = 180^\circ - \angle BAD - \angle ABD = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$). Võrdhaarsest täisnurksest kolmnurgast CDE saame $\angle CDE = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$. Seega

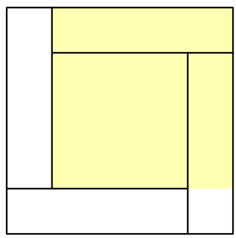
$$\angle BDE = 90^\circ - \angle ADB - \angle CDE = 20^\circ.$$

7. *Lahendus 1.* Olgu algse ruudu küljepikkus a, siis ristküliku lühema külje pikkus on $\frac{1}{4}a$ (joonis 4). Tühja ruudu küljepikkus on $a - \frac{1}{4}a$ ehk $\frac{3}{4}a$. Seega $\left(\frac{3}{4}a\right)^2 = 36\text{ cm}^2$, kust $\frac{3}{4}a = 6$ cm ja $a = 8$ cm. Järelikult algse ruudu pindala on 64 cm^2.

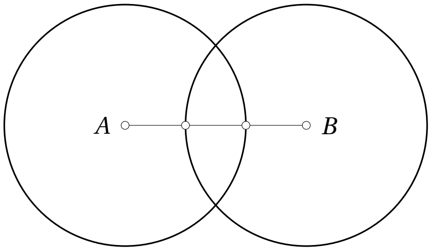
Lahendus 2. Olgu algse ruudu pindala x, siis ühe ristküliku pindala on $\frac{1}{4}x$. Saame võrrandi $x = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}x + 36\text{ cm}^2$ (joonisel 5 on värvitud algse ruuduga võrdpindne ruut), kust $\frac{9}{16}x = 36\text{ cm}^2$ ja $x = 64\text{ cm}^2$.



Joonis 4



Joonis 5



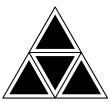
Joonis 6

8. Ringjoone raadius on kaks kolmandikku lõigu AB pikkusest (joonis 6) ehk 8 cm. Ümbermõõt on niisiis $2\pi \cdot 8$ cm ehk 16π cm.

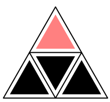
Märkus. Ligikaudne arvväärtus on $16\pi \approx 50{,}2654824574$.

9. Rühmitame kõik võimalused punaste kolmnurkade arvu järgi. Võimalusi, kus kõik kolmnurgad on mustad, on 1 (joonis 7). Võimalusi, kus täpselt üks kolmnurk on punane, on 2: punane kolmnurk võib olla nurgas (joonis 8) või keskel (joonis 9). Võimalusi, kus täpselt kaks kolmnurka on punased, on samuti 2: üks punane kolmnurk peab olema niikuinii nurgas, teine punane kolmnurk aga võib olla teises nurgas (joonis 10) või keskel (joonis 11). Analoogiliselt eelnevaga on 2 võimalust, kus täpselt kolm kolmnurka on punased ehk täpselt üks kolmnurk must (joonised 12 ja 13), ja 1 võimalus, kus kõik kolmnurgad on punased (joonis 14). Kokku oleme saanud 8 võimalust.

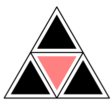
10. Pindmise ühikkuubi eemaldamisel tekib kehale üks uus tahk eemaldatud ühikkuubi iga varjatud tahu kohta. Kuubi serva keskel asuval ühikkuubil on varjatud 4 tahku (2 on näha), servi on kuubil 12. Kõik algse kuubi 6 tahku jäävad alles (nelja ühikruudu võrra väiksemana), seega tekkival kujundil on $4 \cdot 12 + 6$ ehk 54 tahku.



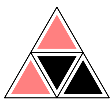
Joonis 7



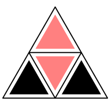
Joonis 8



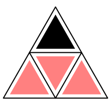
Joonis 9



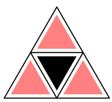
Joonis 10



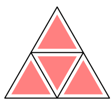
Joonis 11



Joonis 12



Joonis 13



Joonis 14

Eesti LX matemaatikaolümpiaad

19. jaanuar 2013 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa vastused

1. 37.
2. 6.
3. 12.
4. 119.
5. 109.
6. 100°.
7. $40\ \mathrm{cm}^2$.
8. $\frac{2}{\pi}\ \mathrm{m}^2$.
9. 11.
10. 36.

Lahendused

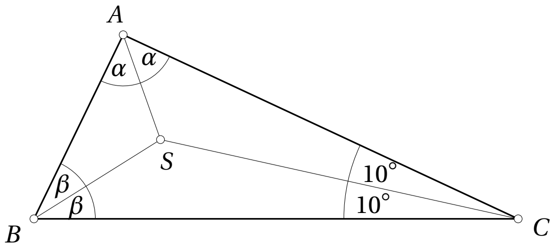
1. Arv $3012 - 2013$ ehk 999 avaldub kujul $999 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$, kus kõik tegurid on algarvud. Suurim algtegur on 37.

2. Et korrutis 12345 on paaritu, on mõlemad tegurid $a + b$ ja $c \cdot d + (e + f) \cdot g$ paaritud. Et summa $a + b$ oleks paaritu, peab üks liidetavatest a ja b olema paaris ja teine paaritu. Seega vähemalt üks seitsmest arvust peab olema paaris, ülimalt kuus saavad olla paaritud. Kuus paaritut arvu on ka võimalik, nt $(1 + 2) \cdot (1 \cdot 1 + (1 + 4113) \cdot 1) = 12345$.

3. Kolme võrduse vastavate poolte korrutamisel saame $a^2b^2c^2 = 3 \cdot 27 \cdot 16 = 3^4 \cdot 2^4 = 6^4$. Seega $abc = 6^2 = 36$, kust $c = \frac{abc}{ab} = 12$.

4. *Lahendus 1.* Jagamisel 5-ga annavad jäägi 0 arvud, mis lõpevad 0-ga või 5-ga. Seega jäägi 4 annavad 5-ga jagamisel arvud, mis lõpevad 4-ga või 9-ga. Jagamisel 2-ga annavad jäägi 1 paaritud arvud, mistõttu viimane number ei saa olla 4. Hakkame kolmekohalisi 9-ga lõppevaid arve suuruse järjekorras alates vähimast läbi vaatama. Arv 109 annab 3-ga jagades jäägi 1, seega ei sobi. Arv 119 aga annab 3-ga jagades jäägi 2.

   Lahendus 2. Otsitavast 1 võrra suurem arv jagub 2-ga, 3-ga ja 5-ga, seega ka arvuga VÜK$(2, 3, 5)$ ehk 30. Vähim 100-st suurem 30-ga jaguv arv on 120. Järelikult otsitav arv on 119.



Joonis 15

5. Kui lapsed võtavad algul kumbki ainult teise lapse lemmikkomme, siis pärast seda, kui kumbki on võtnud 50 kommi, jääb kaussi 50 Mari lemmikkommi. Seejärel võtavad mõlemad neid, kuni Mari saab 5 oma lemmikkommi kätte. Nii saavad lapsed kokku 109 kommi.

Teisalt, kui lapsed võtavad suvalisel reegleid järgival viisil kokku 109 kommi, siis Mari on saanud 55 kommi. Et ülimalt 50 saavad olla Jüri lemmikkommid, siis on Mari saanud 5 oma lemmikkommi kätte ning rohkem reeglite järgi võtta ei saa.

6. Tähistagu $\alpha = \angle BAS$ ja $\beta = \angle ABS$. Siis kolmnurga ABC nurkade suurused on 2α, 2β ja $2 \cdot 10^\circ$ (joonis 15), järelikult $\alpha + \beta + 10^\circ = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$. Seega $\alpha + \beta = 80^\circ$. Saame

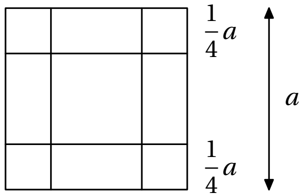
$$\angle ASB = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 100^\circ.$$

7. *Lahendus 1.* Olgu algse ruudu küljepikkus a, siis ristküliku lühema külje pikkus on $\frac{1}{4}a$ (joonis 16) ja ristküliku pindala on $\frac{1}{4}a^2$. Raami sisse jääva tühja ruudu küljepikkus on $a - \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}a$ ehk $\frac{1}{2}a$, seega tema pindala on $\frac{1}{4}a^2$ ehk sama mis ristkülikul. Järelikult $\frac{1}{4}a^2 = 10\ \mathrm{cm}^2$, kust $a^2 = 40\ \mathrm{cm}^2$.

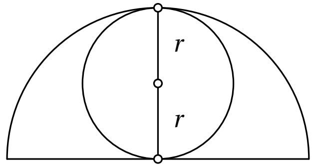
Lahendus 2. Olgu algse ruudu pindala x; see on ühtlasi ka raami ja tema sisse jääva tühja ruudu kogupindala. Et raami sisse jääva tühja ruudu küljepikkus on kaks neljandikku ehk pool algse ruudu küljepikkusest, siis moodustab tühja ruudu pindala veerandi pindalast x, st $\frac{1}{4}x = 10\ \mathrm{cm}^2$. Järelikult $x = 40\ \mathrm{cm}^2$.

8. Olgu ringi raadius r (joonis 17). Et $2\pi r = 2$ m, siis $r = \frac{1}{\pi}$ m. Poolringi raadius on $2r$, seega poolringi pindala on $\frac{1}{2}\pi(2r)^2$ ehk $\frac{2}{\pi}$ m^2.

Märkus. Ligikaudne arvväärtus on $\frac{2}{\pi} \approx 0{,}636619772368$.



Joonis 16



Joonis 17

9. Loeme algul pööramise teel saadud värvimised erinevaks. Et iga osa värvitakse ühega 3 värvist ja neid osi on 3, on kõiki värvimisvõimalusi kokku 3^3 ehk 27.

Et värve on 3, siis on ka 3 sellist värvimisvõimalust, kus kõik kolmnurgad saavad ühte värvi. Järele jääb 24 võimalust, kus on kasutatud vähemalt kaks värvi. Märkame, et kõik sellised värvimised jaotuvad 3-liikmelistesse rühmadesse, kus värvimised on üksteisest saadavad pööramise teel. Seega kui pööramise teel saadavad värvimised lugeda samaks, on vähemalt kaht värvi kasutavaid värvimisi $\frac{24}{3}$ ehk 8. Koos ühe värviga värvimistega on järelikult $3+8$ ehk 11 võimalust.

10. Pindmise ühikkuubi eemaldamisel tekib kehale üks uus tahk eemaldatud ühikkuubi iga varjatud tahu kohta. Tahu keskel asuval ühikkuubil on varjatud 5 tahku (1 on näha), tahke on kuubil 6. Kõik algse kuubi tahud jäävad alles (ühe ühikruudu võrra väiksemana), seega tekkival kujundil on $5 \cdot 6 + 6$ ehk 36 tahku.

Eesti LX matemaatikaolümpiaad

19. jaanuar 2013 Piirkonnavoor **7. klass**

II osa lahendused

1. *Vastus:* 33.

   Olgu x kummagi lapse söödud ploomide arv. Lapsed sõid kokku $2x$ ploomi ja mamma seega $2{\cdot}2x$ ehk $4x$ ploomi. Lapsed ja mamma sõid kokku $2x{+}4x$ ehk $6x$ ploomi.

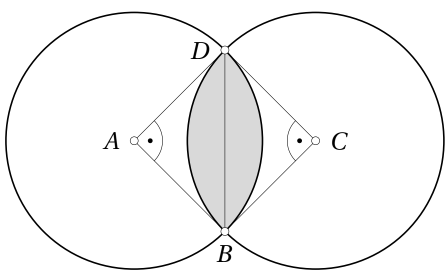
   Et papa sõi ülimalt pooled ploomid, siis $6x$ peab olema vähemalt pool ploomide koguarvust 75, st $6x \geqslant 38$. Siit $x \geqslant 7$. Et aga papa sõi rohkem kui mamma, sõi pere kokku rohkem kui $6x + 4x$ ehk $10x$ ploomi, st $75 > 10x$, kust $x \leqslant 7$.

   Kokkuvõttes on ainus võimalus $x = 7$, mis annab laste ja mamma söödud ploomide koguarvuks $6 \cdot 7$ ehk 42 ning papa söödud ploomide arvuks $75 - 42$ ehk 33.

2. *Vastus:* a) 4π cm; b) $(8\pi - 16)$ cm^2.

   a) Värvitud kujund on piiratud kahe võrdse ringjoone kaarega. Et $ABCD$ on ruut, siis neile kaartele vastab sektori nurk 90° (joonis 18), mis moodustab täispöördest veerandi. Järelikult ka kummagi ringjoone kaare BD pikkus moodustab vastava ringi ümbermõõdust veerandi. Kujundi ümbermõõt on niisiis $2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 4$ cm ehk 4π cm.

   b) Ruudu $ABCD$ küljepikkus on 4 cm, mistõttu tema pindala on 16 cm^2. Ruudu külgedega piiratud ringjoone sektori pindala on veerand ringi pindalast, st $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 16$ cm^2 ehk 4π cm^2. Ruudu $ABCD$ värvimata osa



Joonis 18

pindala on siis $2 \cdot \left(16\ \mathrm{cm}^2 - 4\pi\ \mathrm{cm}^2\right)$ ehk $(32 - 8\pi)\ \mathrm{cm}^2$. Värvitud kujundi pindala on järelikult $16\ \mathrm{cm}^2 - (32 - 8\pi)\ \mathrm{cm}^2$ ehk $(8\pi - 16)\ \mathrm{cm}^2$.

Märkus. Värvitud kujundi pindala võib arvutada ka teisiti. Kolmnurga ABD pindala on $\frac{1}{2} \cdot 16\ \mathrm{cm}^2$ ehk $8\ \mathrm{cm}^2$. Ruudu külgedega piiratud ringjoone sektori pindala on $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 16\ \mathrm{cm}^2$ ehk $4\pi\ \mathrm{cm}^2$. Seega värvitud kujundist poole pindala on $4\pi\ \mathrm{cm}^2 - 8\ \mathrm{cm}^2$ ehk $(4\pi - 8)\ \mathrm{cm}^2$. Seega kogu värvitud kujundi pindala on $2 \cdot (4\pi - 8)\ \mathrm{cm}^2$ ehk $(8\pi - 16)\ \mathrm{cm}^2$.

3. *Vastus:* 18 : 18.

Neljast õpilasest saab moodustada 6 paari, kapten kuulub neist 3 paari. Et 7A klassi iga paar 6-st mängis läbi 7B klassi iga paariga 6-st, siis kokku toimus $6 \cdot 6$ ehk 36 mängu, sh 7A klassi kapteni osalusel $3 \cdot 6$ ehk 18. Seega 7A klass lõi värava 18 mängus ja 7B klass järelikult $36 - 18$ ehk samuti 18 mängus. Järelikult lõppskoor oli 18 : 18.

II osa lahendused

1. *Vastus:* $a = 23$, $b = 17$, $c = 13$, $d = 2$, $e = 11$, $f = 19$.

Ülesande tingimustest saame võrratused

$$c > d, \quad c < b, \quad e > d, \quad f < a, \quad c > e, \quad b < f.$$

Seega $d < e < c < b < f < a$. Kuna algarvude korrutis on paaris, siis peab üks neist algarvudest olema 2. Et 2-st väiksemaid algarve pole olemas, on ainus variant $d = 2$. Et antud arvudest suurim on 23, siis $a = 23$ ja ülejäänud neli arvu tuleb leida 2 ja 23 vahele jäävate algarvude 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 seast. Kuid $a + d = 23 + 2 = 25 = 5 \cdot 5$ ja $a - d = 23 - 2 = 21 = 3 \cdot 7$, mistõttu 3, 5 ja 7 ei sobi. Üle jääb vaid võimalus $e = 11$, $c = 13$, $b = 17$, $f = 19$.

Märkus. Eeldust, et arv c on suurem arvust d, ei lähe lahendamisel vaja, sest see järeldub teistest eeldustest ($e > d$ ja $c > e$).

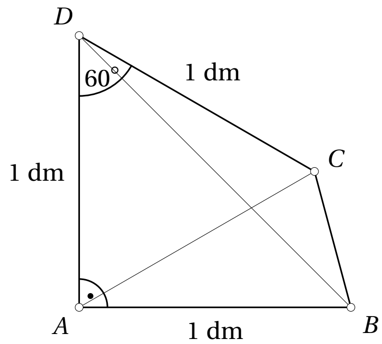
2. *Vastus:* $15°$, $30°$, $135°$.

Kuna kolmnurk ACD on võrdhaarne tipunurgaga $60°$ (joonis 19), siis $\angle CAD = \angle ACD = 60°$. Seega on kolmnurk ACD võrdkülgne, mistõttu $|AC| = 1$ dm $= |AB|$. Et $\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD = 30°$, siis võrdhaarsest kolmnurgast ABC saame $\angle BCA = \angle CBA = \dfrac{180° - \angle BAC}{2} = 75°$. Kolmnurk ABD on võrdhaarne tipunurgaga $90°$, seega $\angle ABD = \angle ADB = 45°$. Järelikult

$$\begin{aligned}\angle BDC &= \angle ADC - \angle ADB = 15°,\\ \angle DBC &= \angle CBA - \angle ABD = 30°,\\ \angle BCD &= \angle BCA + \angle ACD = 135°.\end{aligned}$$

3. *Vastus:* a) 37 cm; b) 64 cm.

a) Lühema viie taime pikkuste summa on $5 \cdot 32$ cm ehk 160 cm, pikema viie taime pikkuste summa aga $5 \cdot 42$ cm ehk 210 cm. Seega kõigi taimede keskmine pikkus on $\dfrac{160 \text{ cm} + 210 \text{ cm}}{10}$ ehk 37 cm.



Joonis 19

b) Kui viiest lühemast taimest kõrgeima pikkus oleks alla 34 cm, siis nende viie taime pikkused oleksid ülimalt 33 cm, 32 cm, 31 cm, 30 cm ja 29 cm. Seega nende taimede keskmine pikkus oleks ülimalt 31 cm, mis on vastuolus ülesande tingimusega. Juht, kus viiest lühemast taimest kõrgeima pikkus on täpselt 34 cm, on võimalik — pikkused võivad olla 34 cm, 33 cm, 32 cm, 31 cm ja 30 cm. Seega viiest pikemast taimest madalaima pikkus on vähemalt 35 cm ja pikkuselt teise, kolmanda ja neljanda pikkused vähemalt 36 cm, 37 cm ja 38 cm. Olgu kõrgeima taime pikkus x cm; siis $\frac{35+36+37+38+x}{5} \leqslant 42$, kust $x \leqslant 64$. Seega otsitav pikkus on 64 cm.

Märkus. Taimede keskmise pikkuse a)-osas võib arvutada ka lihtsalt tehtega $\frac{32\text{ cm} + 42\text{ cm}}{2}$, sest kummaski rühmas on ühepalju taimi.

II osa lahendused

1. *Vastus:* 2.

Lahendus 1. Kuna $2a+2$ on arvu $a+1$ täiskordne, siis arvud $2a+1$ ja $2a+3$ arvuga $a+1$ jaguda ei saa, sest a positiivsuse tõttu $a+1>1$. Seega jagub arvuga $a+1$ arv $2a+5$, mistõttu jagub arvuga $a+1$ ka vahe $(2a+5)-(2a+2)$ ehk arv 3. Arvu a positiivsust arvestades on ainus võimalus $a+1=3$ ehk $a=2$, mis ka sobib: arvud $2a+1=5$, $2a+3=7$, $2a+5=9$ jaguvad vastavalt arvudega $5=a+3$, $7=a+5$ ja $3=a+1$.

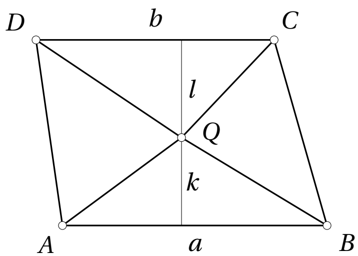
Lahendus 2. Kuna $2a+6$ on arvu $a+3$ täiskordne, siis saavad arvuga $a+3$ jaguda vaid arvud $2a+1$ ja $2a+3$, aga mitte arv $2a+5$. Kui arv $2a+3$ jaguks arvuga $a+3$, siis ka vahe $(2a+6)-(2a+3)$ ehk arv 3 jaguks arvuga $a+3$, mis on võimatu, sest a on positiivne. Kui arv $2a+1$ jagub arvuga $a+3$, siis vahe $(2a+6)-(2a+1)$ ehk arv 5 jagub arvuga $a+3$. Siit ainsa võimalusena $a=2$. Leitud lahendit kontrollime nagu lahenduses 1.

2. Antud võrrand on samaväärne seosega $(x^2-2x)+(y^2-2y)=r$, mis omakorda on samaväärne võrdusega $(x^2-2x)+(y^2-2y)+2=r+2$ ehk $(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)=r+2$ ehk

$$(x-1)^2+(y-1)^2=r+2.$$

Et ruudud on mittenegatiivsed, siis $r+2\geqslant 0$, kust $r\geqslant -2$.

3. *Vastus:* 1.

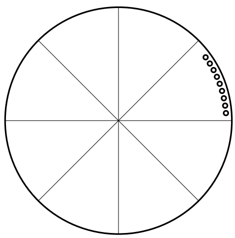


Joonis 20

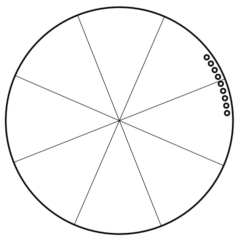
Tähistame $|AB| = a$, $|CD| = b$ ning olgu punkti Q kaugus sirgetest AB ja CD vastavalt k ja l (joonis 20). Kolmnurkade ABQ ja CDQ pindalad on vastavalt $\frac{1}{2}ak$ ja $\frac{1}{2}bl$, seega $ak = bl$. Et ka ülejäänud kaks kolmnurka peavad olema sama pindalaga, siis kolmnurkade ABQ ja CDQ kogupindala on pool nelinurga $ABCD$ pindalast. Trapetsi pindala valemi järgi on see $\frac{1}{2}(a+b)(k+l)$ ehk $\frac{1}{2}ak+\frac{1}{2}al+\frac{1}{2}bk+\frac{1}{2}bl$. Järelikult $\frac{1}{2}ak+\frac{1}{2}bl = \frac{1}{2}al+\frac{1}{2}bk$, kust $a(k-l) = b(k-l)$ ehk $(a-b)(k-l) = 0$. Seega $a = b$ või $k = l$. Kui $k = l$, siis saame seosest $ak = bl$ ikkagi $a = b$, mistõttu $a = b$ igal juhul. Järelikult otsitav suhe on 1.

4. *Vastus:* jah.

Lahendus 1. Paneme kõik 9 küünalt serva osale, mille pikkus moodustab kogu tordi ümbermõõdust kaheksandiku. See on võimalik, sest kaheksandik tordi servast mahutab vastavalt ülesande tingimustele 12 küünalt. Siis kuidas ka ei jagaks torti nõutud viisil, jäävad kõik 9 küünalt kas ühele tükile (joonis 21) või kahele tükile (joonis 22). Esimesel juhul on ühel torditükil isegi 9 küünalt, kuid ka teisel juhul peab vähemalt ühel neist kahest torditükist olema vähemalt pooled küünlad ehk vähemalt 5 küünalt.

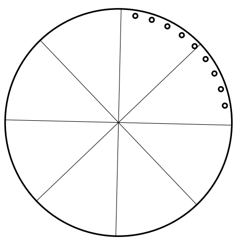


Joonis 21

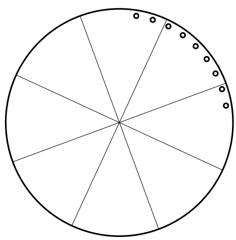


Joonis 22

Lahendus 2. Jagame tordi serva 40 võrdseks osaks ja paneme küünlad 9 järjestikuse osa keskele. Kui nüüd tort jagada 8 võrdseks sektoriks, siis küün-



Joonis 23



Joonis 24

lad jäävad kas kahe või kolme kõrvutise tüki peale. Kui kõik 9 küünalt jäävad kahele tükile (joonis 23), siis peab vähemalt ühel tükil olema 5 küünalt. Kui küünlad jäävad kolmele tükile (joonis 24), siis on keskmisel tükil täpselt $\frac{40}{8}$ ehk 5 küünalt.

Märkus. Kasutades ära asjaolu, et küünlad ei ole lõpmata peenikesed, vaid neil on oma läbimõõt, on võimalik garanteerida 5 küünlaga tükk isegi juhul, kui neli diameetraalset lõiget ei pea torti tingimata võrdseteks tükkideks jaotama. Nimelt, paigutame 5 küünalt tordi servale nii, et järjestikuste küünalde vahemaa oleks küünla läbimõõdust väiksem, ülejäänud 4 küünalt aga paigutame diametraalselt nende 5 küünla vaheliste vahede vastu. Sellisel juhul pole võimalik teha diametraalset lõiget, mis ei läbiks ühtki küünalt ja mis läheks läbi nende 5 küünla vahelt, st mistahes diametraalne lõige jätab need 5 küünalt ühele tükile.

Lahendused

1. *Vastus:* kahtesid oli 40% ja viisi 10%.

Lahendus 1. Olgu kahtede protsent x, siis viite protsent on $100-20-30-x$ ehk $50-x$. Ülesande tingimustest saame, et

$$\frac{20\cdot 4+30\cdot 3+x\cdot 2+(50-x)\cdot 5}{100}=3\,,$$

mis lihtsustades annab $\dfrac{420-3x}{100}=3$. Siit leiame, et $x=40$ ja $50-x=10$.

Lahendus 2. Olgu kahtede, kolmede, neljade ja viite osakaalud kõigi Juku hinnete hulgas vastavalt k_2, k_3, k_4 ja k_5. Siis vastavalt ülesande tingimustele $k_3=0{,}3$ ja $k_4=0{,}2$ ning et kõik Juku hinded olid kahe ja viie vahel, siis $k_2+k_3+k_4+k_5=1$. Et keskmine hinne oli 3, siis $2k_2+3k_3+4k_4+5k_5=3$, mistõttu

$$k_3+2k_4+3k_5=(2k_2+3k_3+4k_4+5k_5)-2\cdot(k_2+k_3+k_4+k_5)=3-2=1.$$

Asendades $k_3=0{,}3$ ja $k_4=0{,}2$, saame võrrandi $3k_5=0{,}3$, kust $k_5=0{,}1$ ehk Jukul oli 10% viisi. Lõpuks leiame $k_2=0{,}4$ ehk kahtesid oli Jukul 40%.

2. *Vastus:* $x=1$ ja $x=-1$.

Korrutades võrrandi pooli 2-ga ja avades sulud, saame

$$2\cdot\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+2\,,$$

kust $x^2+\dfrac{1}{x^2}=2$. Paneme tähele, et siin $x\neq 0$. Korrutades nüüd saadud võrrandi pooled läbi teguriga x^2 ja viies kõik liikmed ühele poole, saame $x^4-2x^2+1=0$ ehk $(x^2-1)^2=0$, kust $x^2=1$ ehk $x=\pm 1$.

Märkus. Lõpuosas ei ole teguriga x^2 korrutamine sihile jõudmise seisukohalt oluline, see vaid aitab murdudest vabaneda, mis on mugavuse küsimus. Võiksime kohe kõik liikmed vasakule viia ja märgata, et $2=2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}$, mis annaks võrrandi $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=0$, kust $x=\dfrac{1}{x}$ ehk $x^2=1$ ja $x=\pm 1$.

3. *Vastus:* 7.

Et arvu ja tema vastandarvu ruudud on võrdsed, võime piirduda vaid naturaalarvude ruutude vaatlemisega. Numbritega 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 lõppevate naturaalarvude ruudud lõpevad vastavalt numbritega 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1. Nende seas on täpselt 6 erinevat numbrit. Seega kuni 6 täisarvu ruudu korral võib juhtuda, et nende ruudud lõpevad erinevate numbritega, mistõttu neist ühegi kahe vahe ei jagu 10-ga. Kui aga on antud 7 täisarvu ruutu, siis nende seas leidub kindlasti kaks, mis lõpevad sama numbriga. Nende vahe jagub 10-ga.

4. Paneme tähele, et

$$\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=1+\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{1}{k^2(k+1)^2}=1+\frac{2k}{k^2(k+1)^2}>1$$

ja

$$\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1+\frac{1}{(k+1)^2}\right)=1-\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{1}{k^2(k+1)^2}=1-\frac{2k+2}{k^2(k+1)^2}<1.$$

Seega

$$\left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2013^2}\right)>2\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{2013^2}\right)>\frac{3}{2}$$

ja

$$\left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2013^2}\right)<2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{10}{9}=\frac{5}{3}.$$

5. *Vastus:* 15°.

Et punktis T kohtuvad raadius BT ja puutuja AT, siis $\angle ATB=90^\circ$ (joonis 25). Täisnurksest kolmnurgast ABT saame

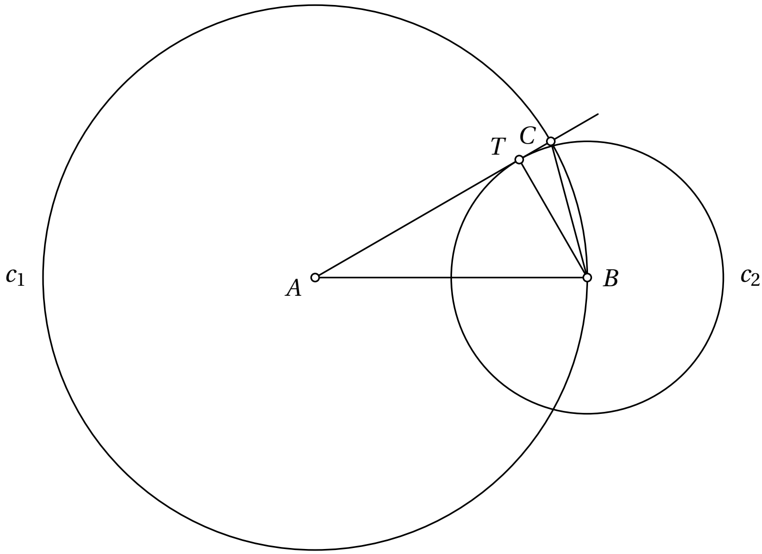
$$\sin\angle TAB=\frac{|BT|}{|AB|}=\frac{|BT|}{|AC|}=\frac{1}{2},$$

seega $\angle TAB=30^\circ$ ja $\angle TBA=60^\circ$. Võrdhaarsest kolmnurgast ABC saame nüüd $\angle CBA=\dfrac{180^\circ-\angle TAB}{2}=75^\circ$, mistõttu

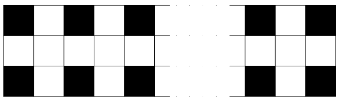
$$\angle TBC=\angle CBA-\angle TBA=15^\circ.$$

6. *Vastus:* 3.

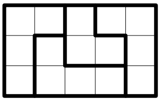
Värvime mustaks kõik ruudud, mille rea- ja veerunumbrid on paaritud (joonis 26). Tekib täpselt $2\cdot 1007=2014$ musta ruutu. Kolmest ühikruudust koosnev nurgik saab katta ülimalt ühe musta ruudu, mistõttu ainult nendega kogu ruudustiku katmisel tuleks kasutada vähemalt 2014 nurgikut. See pole võimalik, sest nende nurgikute kaetavate ühikruutude koguarv $3\cdot 2014$ oleks suurem kui kogu ruudustiku pindala $3\cdot 2013$.



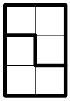
Joonis 25



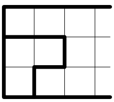
Joonis 26



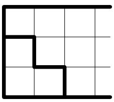
Joonis 27



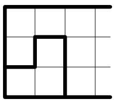
Joonis 28



Joonis 29



Joonis 30



Joonis 31

Et kolmest ühikruudust koosnevad kujundid katavad kokku 3-ga jaguva arvu ühikruute ning ka ühikruutude arv ruudustikus jagub 3-ga, siis jääb ka neljast ühikruudust koosnevate nurgikute katta 3-ga jaguv arv ühikruute. Seega neljast ühikruudust koosnevaid nurgikuid peab olema 3-ga jaguv arv, niisiis vähemalt 3.

Katmine, kus on kasutatud vaid 3 neljast ühikruudust koosnevat nurgikut, on võimalik: täidame 3×5 osa ruudustiku otsas (joonis 27) ning ülejäänud 3×2008 ruudustiku katame kolmest ühikruudust koosnevate nurgikutega 3×2 sektsioonide kaupa (joonis 28).

Märkus. Seda, et ainult kolmest ühikruudust koosnevate nurgikutega katmine pole võimalik, on üsna lihtsalt võimalik näidata ka vahetu arutelu teel, ilma värvimiseta. Uurime, kuidas peaksid kolmesed nurgikud paiknema ruudustiku nurgas. Paigutus, kus nurgiku keskmine ruut ühtib ruudustiku otsmistest ruutudest keskmisega (joonis 29), pole võimalik, sest siis jääb ühes servas katmata kaks ruutu, kuhu nurgikut paigutada ei anna. Kui nurgiku keskmine ruut asub ruudustiku nurgas (joonis 30), siis ainus võimalus sama otsa teist nurgaruutu katta on panna teine nurgik nii, et koos esimesega hõivavad nad ruudustiku otsast 3×2 tüki. Sama kehtib juhul, kui esimese nurgiku keskmine ruut asub nurgaruudu teisel naaberruudul (joonis 31). Pärast kahe nurgiku paigutamist tuleb samal viisil katta 3×2011 ruudustik, kus kehtib sama arutelu. Kokkuvõttes nõuaks kolmeste nurgikutega katmine ruudustiku jagamist 3×2 sektsioonideks. Kuna 2013 ei jagu 2-ga, siis see pole võimalik.

Lahendused

1. *Vastus:* kõik reaalarvud $x \geqslant 1$.

Kui $x < 0$, siis antud võrdus ei kehti, sest vasak pool on mittenegatiivne, kuid parem pool negatiivne.

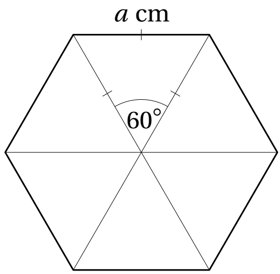
Kui $0 \leqslant x < 1$, siis $x - 1 < 0$, mistõttu $|x - 1| = -(x - 1) = 1 - x$ ja $|x-1|+1 = 2-x > 0$. Seega $\big||x-1|+1\big| = |2-x| = 2-x$ ja ülesande võrrand omandab kuju $2 - x = x$, kust $x = 1$. See ei vasta tingimusele $0 \leqslant x < 1$.

Kui $x \geqslant 1$, siis $x-1 \geqslant 0$, mistõttu $|x-1| = x-1$ ja $|x-1|+1 = x-1+1 = x > 0$. Seega $\big||x - 1| + 1\big| = |x| = x$ ja ülesande võrrand on alati rahuldatud.

2. *Vastus:* $8\sqrt{3}$.

Lahendus 1. Olgu kuusnurga küljepikkus a cm (joonis 32), siis kuusnurga ümbermõõt on $6a$ cm ja pindala $6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ cm^2 (sest kuusnurk koosneb 6 võrdkülgsest kolmnurgast küljepikkusega a cm). Niisiis saame võrrandi $6a = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, kust a positiivsuse tõttu ainsa võimalusena $a = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ja $x = 6a = 8\sqrt{3}$.

Lahendus 2. Et kuusnurga ümbermõõt on x cm, siis kuusnurga küljepikkus on $\frac{x}{6}$ cm. Kuusnurk jaotub kuueks võrdkülgseks kolmnurgaks, mille küljepikkus võrdub kuusnurga küljepikkusega; ühe kolmnurga pindala on



Joonis 32

$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{x}{6}\right)^2$ cm^2. Saame võrrandi

$$6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{x}{6}\right)^2 = x,$$

kust positiivsuse tõttu saame ainsa võimalusena $x = 8\sqrt{3}$.

3. *Vastus:* 14^2, 86^2, 334^2, 1006^2.

Olgu $\sqrt{n+2013} - \sqrt{n} = m$, kus m on täisarv (arv m on ka positiivne, sest $n + 2013 > n$ tõttu $\sqrt{n+2013} > \sqrt{n}$). Siis $\sqrt{n+2013} = m + \sqrt{n}$, mis võrduse poolte positiivsuse tõttu on samaväärne poolte ruututõstmisel saadava võrdusega $n + 2013 = m^2 + 2m\sqrt{n} + n$ ehk

$$2013 = m^2 + 2m\sqrt{n} = m \cdot \left(m + 2\sqrt{n}\right).$$

Seega $\sqrt{n} = \frac{2013 - m^2}{2m}$ on ratsionaalarv; et n on täisarv, siis $\sqrt{n}$ on seejuures täisarv. Nüüd saame seosest $m \cdot \left(m + 2\sqrt{n}\right) = 2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ järgmised võimalused:

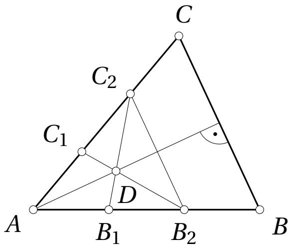
- $m = 1$, $m + 2\sqrt{n} = 2013$, kust $\sqrt{n} = 1006$ ja $n = 1006^2$;
- $m = 3$, $m + 2\sqrt{n} = 671$, kust $\sqrt{n} = 334$ ja $n = 334^2$;
- $m = 11$, $m + 2\sqrt{n} = 183$, kust $\sqrt{n} = 86$ ja $n = 86^2$;
- $m = 33$, $m + 2\sqrt{n} = 61$, kust $\sqrt{n} = 14$ ja $n = 14^2$.

Märkus. Lahenduse algul, olles tähistanud $\sqrt{n+2013} - \sqrt{n} = m$, on võtmeseosteni $2013 = m^2 + 2m\sqrt{n} = m \cdot \left(m + 2\sqrt{n}\right)$ võimalik jõuda ka teisiti. Üks võimalus on korrutada pooled summaga $\sqrt{n+2013} + \sqrt{n}$, mis annab $2013 = n + 2013 - n = m\left(\sqrt{n+2013} + \sqrt{n}\right)$. Et $\sqrt{n+2013} - \sqrt{n} = m$, siis $\sqrt{n+2013} + \sqrt{n} = m + 2\sqrt{n}$, kust saamegi $2013 = m\left(m + 2\sqrt{n}\right)$. Sihile jõuab ka, kui tõsta kohe võrduse $\sqrt{n+2013} - \sqrt{n} = m$ pooled ruutu, mis pärast liikmete ümberpaigutamist annab $2n + 2013 - m^2 = 2\sqrt{n(n+2013)}$. Uus ruututõstmine annab

$$4n^2 + 2013^2 + m^4 + 4n \cdot 2013 - 2 \cdot 2013m^2 - 4n \cdot m^2 = 4n^2 + 4n \cdot 2013,$$

kust lihtsustamisel tekib $4n \cdot m^2 = 2013^2 - 2 \cdot 2013m^2 + m^4 = (2013 - m^2)^2$ ehk $n = \left(\frac{2013 - m^2}{2m}\right)^2$. Kuna $m^2 < 2013$, siis $\sqrt{n} = \frac{2013 - m^2}{2m}$ ehk $2013 = m^2 + 2m\sqrt{n}$.

Selliste lähenemiste korral tuleb aga rohkem tööd teha veendumaks, et ei teki võõrlahendeid. Leiab ju lahenduse edasine käik lahendid teisendatud



Joonis 33

võrrandile $2013 = m\left(m + 2\sqrt{n}\right)$, mitte algsele seosele $\sqrt{n+2013} - \sqrt{n} = m$, mistõttu võõrlahendite küsimus on paratamatult õhus. Põhilahenduses on lahendite vastavus originaalseosele tagatud sellega, et kõik teisendussammud lahenduse algul on pööratavad (ka ruututõstmine, sest pooled on positiivsed). Seetõttu pole eraldi kontrolli lõpus vaja. Ka osutatud teises alternatiivlähenemises, kus toimub kaks ruututõstmist, on need mõlemad poolte positiivsuse tõttu pööratavad, kuid neist teise juures on selleks vaja märgata, et $m^2 \leqslant 2013$. Esimeses alternatiivlähenemises, kus korrutatakse suurusega $\sqrt{n+2013} + \sqrt{n}$, pole võõrlahendite välistamine nii lihtne, sest sammu, kus pannakse $\sqrt{n+2013} + \sqrt{n}$ asemele $m + 2\sqrt{n}$, ei saa otse pöörata. Ilmselt ei ole lihtne ka lahendite ükshaaval läbikontrollimine. Et jõuda originaalvõrrandini tagasi, võib näiteks lahendada võrdusest $2013 = m^2 + 2m\sqrt{n}$ saadud ruutvõrrandi $m^2 + 2\sqrt{n} \cdot m - 2013 = 0$, mis annab $m = -\sqrt{n} \pm \sqrt{n+2013}$. Et meil $m > 0$, on ainus võimalus plussiga lahend ehk $m = \sqrt{n+2013} - \sqrt{n}$.

4. *Vastus:* $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Kui $\cos\alpha = \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, siis $\sin\alpha = \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$. Saame ruutvõrrandi

$$\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1 = 0,$$

millest $\sin\alpha = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Et miinusmärgi puhul oleks $\sin\alpha < 0$, kuid $\sin\alpha = \cos^2\alpha \geqslant 0$, siis jääb ainsa võimalusena järele $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Märkus. Lihtne on näha, et kõik nurgad α, mille korral $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, seost $\cos\alpha = \tan\alpha$ ka rahuldavad. Esimeses veerandis rahuldab seda tingimust nurk $\alpha \approx 38{,}1^\circ$.

5. Vastavalt punktide B_1, B_2, C_1, C_2 valikule on B_1 lõigu AB_2 keskpunkt ja C_1 lõigu AC_2 keskpunkt. Seega B_1C_2 ja B_2C_1 on kolmnurga AB_2C_2 kaks mediaani, niisiis D on kolmnurga AB_2C_2 mediaanide lõikepunkt ja AD pikendus küljeni B_2C_2 on kolmnurga AB_2C_2 kolmas mediaan (joonis 33).

Kolmnurgad AB_2C_2 ja ABC on sarnased, sest $\frac{|AB_2|}{|AB|} = \frac{|AC_2|}{|AC|}$ ja nurk tipu A juures on ühine. Et $BC \parallel B_2C_2$ ning ülesande tingimuse kohaselt $AD \perp BC$, siis ka $AD \perp B_2C_2$ ehk AD pikendus küljeni B_2C_2 on kolmnurga AB_2C_2 kõrgus.

Et kolmnurgal AB_2C_2 langevad mediaan ja kõrgus kokku, siis kolmnurk AB_2C_2 on võrdhaarne. Sarnasuse tõttu on võrdhaarne ka kolmnurk ABC.

Märkus. Lahenduse lõpuosas võib viia arutelu kohe üle kolmnurgale ABC. Kolmnurkade AB_2C_2 ja ABC sarnasusest järeldub, et lõigu AD pikendus sirgeni BC on mediaan kolmnurgas ABC. Et $AD \perp BC$, siis on see lõik ühtlasi kõrgus, niisiis kolmnurk ABC on võrdhaarne.

6. *Vastus:* a) hõbemünt, kui m on paaritu, ja kuldmünt, kui m on paaris; b) $6m + 10(n - 1)$ hõbemünti.

a) Kahe hõbemündi noppimisel kahaneb hõbemüntide arv 2 võrra, kahe kuldmündi noppimisel hõbemüntide arv ei muutu ning kahe erisuguse mündi noppimisel samuti ei muutu, sest nopitud hõbemündi asemele kasvab uus. Seega jääb hõbemüntide arvu paarsus saagi koristamise käigus samaks. Järelikult kui algne hõbemüntide arv m on paaritu, siis jääb üks hõbemünt paratamatult alles, mistõttu viimane münt on hõbemünt. Kui aga m on paaris, siis hõbemüntide arv ei saa olla 1, mistõttu viimane münt on kuldmünt.

b) Et igal käigul kahaneb puus olevate müntide arv 1 võrra, on käikude arv $m + n - 1$. Korjatagu alati korraga kaks ühesugust münti; ainult viimasel käigul on lubatud muu võimaluse puudumisel noppida ka erinevad mündid. Et viimasel käigul juurde kasvanud münt jääb puusse, siis viimase käigu iseloom saaki ei mõjuta: saagiks kujuneb algselt puus olnud m hõbe- ja n kuldmünti ning lisaks $m + n - 2$ juurdekasvanud kuldmünti. Selle saagi väärtus on $m + 5n + 5(m + n - 2) = 6m + 10(n - 1)$ hõbemünti.

Teisalt, kõik algsed mündid on paratamatult saagis sõltumata korjamise järjekorrast ning juhtum, kus kõik juurdekasvanud mündid saagis on kuldmündid, on ilmselt parim. Seega on eespool leitud saagi väärtus ka suurim võimalik.

Lahendused

1. *Vastus:* kõik $x = 30^\circ + n \cdot 360^\circ$ ja $x = 150^\circ + n \cdot 360^\circ$, kus n on täisarv.

Sulgude avamisel vahe ja summa siinuse valemiga saame

$$\sin 45^\circ \cos x - \cos 45^\circ \sin x + \sin 45^\circ = \sin 45^\circ \cos x + \cos 45^\circ \sin x.$$

Koondades sarnased liikmed, saame siit

$$2 \cos 45^\circ \sin x = \sin 45^\circ.$$

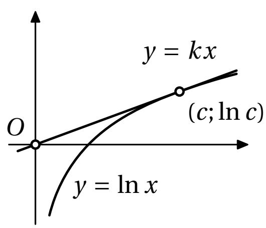
Arvestades, et $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ \neq 0$, saame selle suurusega läbi jagades $2 \sin x = 1$ ehk $\sin x = \frac{1}{2}$. Seega $x = 30^\circ + n \cdot 360^\circ$ või $x = 150^\circ + n \cdot 360^\circ$, kus $n \in \mathbb{Z}$.

Märkus. Teine võimalus vastust esitada on kujul $(-1)^n \cdot 30^\circ + n \cdot 180^\circ$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. *Vastus:* $(\mathrm{e}; 1)$.

Et vaadeldav sirge läbib koordinaatide alguspunkti O, siis tema võrrand on kujul $y = kx$; olgu graafikute ühine punkt kohal $x = c$ (joonis 34). Siis $\ln c = kc$ ehk $k = \frac{\ln c}{c}$. Et aga puutuja tõus k võrdub funktsiooni tuletisega puutekohal, siis $k = \ln'(c) = \frac{1}{c}$. Kokkuvõttes $\frac{\ln c}{c} = \frac{1}{c}$ ehk $\ln c = 1$, kust $c = \mathrm{e}$ ja puutepunkti koordinaadid on $(\mathrm{e}; 1)$.

Märkus 1. Ülesannet on võimalik samamoodi lahendada suvalise alusega logaritmi jaoks, minnes valemiga $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ üle naturaallogaritmile. Osutub, et puutepunkti x-koordinaat on e sõltumata logaritmi alusest.



Joonis 34

Märkus 2. Selle ülesande väidet kasutades saab tõestada huvitava fakti, et avaldis $\sqrt[x]{x}$ saavutab maksimaalse väärtuse, kui x väärtus on e.

Tõepoolest, olgu $\sqrt[x_1]{x_1} < \sqrt[x_2]{x_2}$. Võttes mõlemalt poolt logaritmi, saame $\frac{1}{x_1}\ln x_1 < \frac{1}{x_2}\ln x_2$ ehk $\frac{\ln x_2}{x_2} > \frac{\ln x_1}{x_1}$. Joonistame koordinaattasandile joone $y = \ln x$ ja koordinaatide alguspunkti läbiva sirge, mille tõus on $k = \frac{\ln x_1}{x_1}$. Tingimus $\frac{\ln x_2}{x_2} > \frac{\ln x_1}{x_1}$ omandab kuju $\ln x_2 > kx_2$, mis ütleb, et kohal x_2 on logaritmi graafik kõrgemal kui sirge. Kui nüüd $x_1 = \mathrm{e}$, siis sirge on ülesande põhjal logaritmi graafiku puutuja, st logaritmi graafik ei tõuse kuskil temast kõrgemale. Järelikult pole olemas niisugust arvu x_2, mille korral $\sqrt[\mathrm{e}]{\mathrm{e}} < \sqrt[x_2]{x_2}$. Suurim arv, mis esitub kujul $\sqrt[x]{x}$, on niisiis $\sqrt[\mathrm{e}]{\mathrm{e}} = 1{,}44466786100977\ldots$.

3. *Vastus:* $(1,-1)$, $(-1,1)$.

Lahendus 1. Liites võrrandid kokku, saame $x^2+2ux+u^2+x^2+2vx+v^2 = 2$ ehk

$$(x+u)^2 + (x+v)^2 = 2.$$

Et ruudud on mittenegatiivsed, siis $(x+u)^2 \leqslant 2$ ja $(x+v)^2 \leqslant 2$, kust täisarvulisuse tõttu $|x+u| \leqslant 1$ ja $|x+v| \leqslant 1$. Juhud $x+u = 0$ ja $x+v = 0$ pole võimalikud, sest annaksid vastavalt $(x+v)^2 = 2$ ja $(x+u)^2 = 2$, kuid 2 pole täisarvu ruut. Seega $x+u = \pm 1$ ja $x+v = \pm 1$. Kui $x+u$ ja $x+v$ on sama märgiga, siis $u = v$, mis on vastuolus ülesande tingimusega. Kui $x+u = 1$ ja $x+v = -1$, siis avaldades $u = 1-x$ ja $v = -1-x$ ja asendades siit ülesandes antud süsteemi esimesse võrrandisse, saame sarnaste liikmete koondamise järel $4x = 0$, kust $x = 0$, $u = 1$, $v = -1$. Kui $x+u = -1$ ja $x+v = 1$, siis samamoodi leiame $x = 0$, $u = -1$, $v = 1$.

Lahendus 2. Lahutades esimesest võrrandist teise, saame uue võrrandi $2ux - 2vx + v^2 - u^2 = 0$, mis vasaku poole tegurdamisel omandab kuju $(u-v)(2x-u-v) = 0$. Et $u \neq v$, siis $2x-u-v = 0$ ehk $x = \frac{u+v}{2}$. Asendades selle ükskõik kumba algsesse võrrandisse, saame pärast lihtsustamist seose $5u^2+6uv+5v^2 = 4$, mis täisruutude eraldamisel saab kuju

$$4(u+v)^2 + (u-v)^2 = 4. \qquad (1)$$

Siit näeme, et $(u-v)^2$ jagub 4-ga, millest eelduse $u \neq v$ tõttu järeldub $(u-v)^2 \geqslant 4$. Et $(u+v)^2 \geqslant 0$, siis võrdus (1) saab kehtida ainult juhul $u+v = 0$, $u-v = \pm 2$. Siit saame lahendid $u = 1, v = -1$ ja $u = -1, v = 1$.

Lahendus 3. Tuues võrrandites kõik liikmed vasakule poole, saab süsteem kuju

$$\begin{cases} x^2+2ux+v^2-1 = 0 \\ x^2+2vx+u^2-1 = 0 \end{cases}.$$

Esimese ruutvõrrandi diskriminant on $4u^2-4v^2+4$ ehk $4(u^2-v^2+1)$, teise ruutvõrrandi diskriminant analoogselt $4(v^2-u^2+1)$. Et lahend oleks täisarvuline, peavad need diskriminandid olema täisarvude ruudud — siis ka u^2-v^2+1 ja v^2-u^2+1 on täisarvude ruudud. Et ruut on mittenegatiivne, saame $u^2-v^2 \geqslant -1$ ja $v^2-u^2 \geqslant -1$. Juhud $u^2-v^2=-1$ ja $v^2-u^2=-1$ pole võimalikud, sest siis vastavalt kas v^2-u^2+1 või u^2-v^2+1 peaks võrduma 2-ga, mis pole täisarvu ruut. Järelikult $u^2-v^2 \geqslant 0$ ja $v^2-u^2 \geqslant 0$, mis kokkuvõttes annab $u^2-v^2=0$ ehk $u^2=v^2$. Arvestades ülesande tingimust $u \neq v$, on ainus võimalus $v=-u$. Asendades selle seose algsesse võrrandisüsteemi, saame

$$\begin{cases} x^2+2ux+u^2 = 1 \\ x^2-2ux+u^2 = 1 \end{cases}$$

ehk $(x+u)^2=1$, $(x-u)^2=1$, kust $x+u=\pm 1$, $x-u=\pm 1$. Et $u \neq v$, siis $u=0$ ei sobi, mistõttu üks arvudest $x+u$ ja $x-u$ on 1 ja teine -1. Ainsad võimalused on $x=0, u=1$ ja $x=0, u=-1$, vastavalt saame $v=-1$ ja $v=1$.

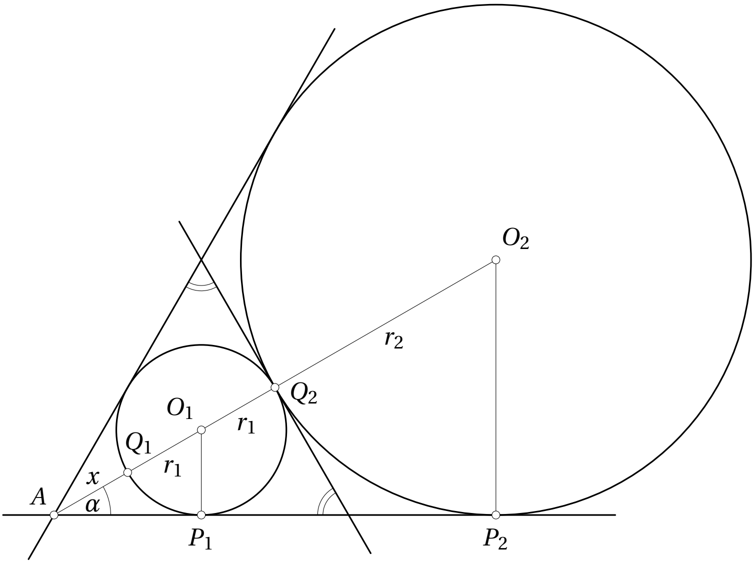
4. *Vastus:* $x=-\dfrac{1}{2}$.

Kui $2x+1 \neq 0$, siis $|2x+1|>0$ ning $3^{|2x+1|}>3^0=1$. Samas iga x korral $-1 \leqslant \sin(\pi x) \leqslant 1$, kust $\sin^2(\pi x) \leqslant 1$. Seega niisugusel juhul lahendeid ei leidu. Jääb üle variant $2x+1=0$ ehk $x=-\dfrac{1}{2}$, mis ka sobib, sest $\sin^2\left(-\dfrac{1}{2}\pi\right)=(-1)^2=1$.

5. Olgu väiksema ja suurema ringjoone keskpunktid vastavalt O_1 ja O_2 ning nende keskpunktide projektsioonid ühele välisele ühispuutujale vastavalt P_1 ja P_2. Olgu ringjoonte väliste ühispuutujate lõikepunkt A; tähistame $\angle O_1AP_1=\angle O_2AP_2=\alpha$. Sümmeetrilisuse tõttu on nurgad kahe ülejäänud lõikepunkti juures võrdsed, mistõttu lõikepunktid määravad võrdkülgse kolmnurga parajasti siis, kui selle kolmnurga nurk tipu A juures on suurusega 60° ehk kui $\alpha=30^\circ$. Olgu veel Q_1 ja Q_2 väiksema ringjoone diameetri otspunktid, mis asuvad sirgel AO_1, seejuures Q_1 lõigul AO_1 (joonis 35).

Eeldame, et $\alpha=30^\circ$. Et $|O_1Q_1|=|O_1P_1|$, siis $\dfrac{|O_1Q_1|}{|O_1A|}=\dfrac{|O_1P_1|}{|O_1A|}=\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$. Seega Q_1 poolitab lõigu AO_1 ehk $|AQ_1|=r_1$. Analoogiliselt poolitab Q_2 lõigu AO_2 ehk $|AQ_2|=r_2$. Siit $r_2=|AQ_2|=|AQ_1|+|Q_1O_1|+|O_1Q_2|=3r_1$.

Eeldame nüüd ümberpöördult, et $r_2=3r_1$. Tähistades $x=|AQ_1|$, saame paralleelsetest lõikudest O_1P_1 ja O_2P_2 võrde $\dfrac{r_1}{x+r_1}=\dfrac{r_2}{x+2r_1+r_2}$ ehk



Joonis 35

$\dfrac{r_1}{x+r_1} = \dfrac{3r_1}{x+5r_1}$, kust $x + 5r_1 = 3x + 3r_1$ ja $x = r_1$. Seega $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$, kust $\alpha = 30^\circ$.

Märkus. Seda, et seosest $r_2 = 3r_1$ järeldub $\alpha = 30^\circ$, saab tõestada veel mitmel viisil. Võib märgata, et homoteetia teguriga 3 viib punkti Q_1 punktiks Q_2, andes seose $x + 2r_1 = 3x$, mis viib kohe võrduseni $x = r_1$, ning jätkata siis nagu lahenduses. Samuti võib märgata, et nurga suurendamisel saab suhe $\dfrac{r_2}{r_1}$ ainult suureneda, mistõttu suhe $\dfrac{r_2}{r_1} = 3$ saab kehtida vaid ühe kindla nurga α korral. Kuna eespool on $\alpha = 30^\circ$ korral $r_2 = 3r_1$ näidatud, siis just $\alpha = 30^\circ$ ongi see ainus võimalus.

6. *Vastus:* alustajal, kui vähemalt üks arvudest m ja n on paaritu; alustaja vastasel, kui m ja n on mõlemad paaris.

Algseis, kus kõik ruudud on värvimata, on ruudustiku keskpunkti suhtes sümmeetriline. Vaatame algul juhtu, kus m ja n on mõlemad paaris. Siis keskpunkti suhtes sümmeetrilised ruudud paiknevad diagonaalis, mistõttu ühegi lubatud käiguga pole võimalik ära värvida kaht keskpunkti suhtes sümmeetrilist ruutu. Seega alustaja mistahes käigule saab teine mängija vastata keskpunkti suhtes sümmeetrilise käiguga. Selle järel tekib jälle keskpunkti suhtes sümmeetriline seis, mistõttu alustaja vastane saab sama põhimõtet rakendada ka järgnevatel käikudel. Et lõppseis, kus kõik ruudud on värvitud, on sümmeetriline ja sümmeetrilised seisud tekivad ainult alustaja vastase käigu järel, siis võidab alustaja vastane.

Kui m ja n on mõlemad paaritud, siis keskmise ruudu värvimine säilitab sümmeetria. Samuti kui m ja n on eri paarsusega, säilitab kahe keskmise ruudu värvimine sümmeetria. Pärast seda enam ei saa värvida ühel käigul kaht teineteise suhtes sümmeetrilist ruutu. Seega alustaja saab avakäigul panna vastase olukorda, milles alustaja on paaris m ja n juhul, ning võidab analoogiliselt selle juhuga.

Lp hindaja!

Käesolevas esitame kõigepealt hindamise üldised põhimõtted ning seejärel järjekorras konkreetsed hindamisjuhised iga ülesande kohta eraldi.

1. Õpilase lahenduseks tuleb esmajoones lugeda see, mida õpilane on ülesande kohta vormistanud puhtandina (sh mustandipaberile selgesti arusaadavalt kirja pandud mõttekäigud, kui need on ametlikult puhtandipaberilt viidatud). Töö mustandi arvestamine või mittearvestamine ülesande lahenduse hulka on hindaja otsustada (või piirkonna hindamiskomisjoni ühine otsus kõigi ülesannete suhtes), kuid see peab toimuma kõigis töödes ühtmoodi.

2. Alljärgnevas on 7.–9. klassi olümpiaadi I osa (testi) ning kõikide ülejäänud ülesannete hindamisjuhised esitatud erinevalt.

   Testi iga küsimuse jaoks on eraldi loetletud või kirjeldatud vastused, mille eest tuleks anda vastavalt kaks punkti või üks punkt (st vastavaid punkte ühe küsimuse piires *ei tule* liita). Testiülesannete lahendusi õpilased ei pea esitama, vaid kirjutavad ülesannete lehel vastavale punktiirile või ülesande tekstis viidatud kohta ainult vastuse.

   Seevastu kõigi teiste ülesannete kohta tuleb esitada täielikud lahendused, ainult vastustest ei piisa. Nende ülesannete lahendused on hindamisjuhistes jaotatud võimalust mööda osadeks (etappideks) ning on näidatud iga osa eest antav punktide arv (st ühe ülesande eest antava punktisumma saamiseks *tuleb* lahenduse erinevate osade eest antud punktid liita).

   Mõnes skeemis on mõne etapi kirjelduse all („*Sealhulgas:*“ järel) alapunktidena välja toodud konkreetse etapi väiksemate osade eest antavad punktid – need lähevad käiku juhul, kui lahenduse see etapp on ebatäielik või vigane ja selle osa täispunkte seetõttu ei saa anda. Alamosade punktid tuleb omavahel samuti liita.

3. Žürii lahendustes ja käesolevates hindamisjuhistes on ülesannete vastused esitatud enamasti ainult ühel, lihtsaimal või kõige tõenäolisemalt esineval kujul. Hindamisel (sh testid!) tuleb võrdselt õigeks lugeda ka sama vastuse teised mõistlikud esitusviisid – sh taandatud hariliku murruna, segaarvuna, kümnendmurruna, sõnadega välja kirjutatuna –, seejuures ka osana pikemalt (nt täislausega, koos sobiva liigisõnaga või koos selgitustega) antud

vastusest. Juhud, kus ülesande sisu tingib erandeid sellest üldreeglist, on eraldi mainitud vastava ülesande hindamisjuhises.

Ühik arvu järel on vastuses vajalik juhul, kui ülesandes on küsitud suurust, mis teatud ühikutes avaldub. Näiteks küsimusele „Kui suur pindala …?“ saab õige vastus olla „120 cm^2“, kuid mitte „120“ (kui ülesande tekstis pole kasutatud ühikuta pikkusi/pindalasid). Teistes ühikutes väljendatud sama suurus tuleb lugeda õigeks, näiteks vastused „120 cm^2“ ja „1,2 dm^2“ on samaväärsed. Ühik vastuses ei ole nõutav, kui ülesandes on küsitud kindlate ühikute arvu. Näiteks küsimusele „Mitu ruutsentimeetrit …?“ antud vastused „120“ ja „120 cm^2“ tuleb võrdväärseks lugeda samal alusel nagu küsimusele „Mitu karu …?“ antud vastused „3“ ja „3 karu“ (vastus koos liigisõnaga). Teistes ühikutes antud vastus tuleb aga lugeda valeks, vastused „120 cm^2“ ja „1,2 dm^2“ ei ole siin samaväärsed.

4. Mõnede ülesannete kohta, mida saab lahendada mitmel oluliselt erineval viisil, anname eraldi hindamisskeemid erinevate lahendusviiside jaoks. Rõhutame, et iga konkreetset mittetäielikku lahendust tuleb hinnata ainult *ühe* sellise skeemi järgi (selle järgi, mille kohaselt ta saaks kõige rohkem punkte).

5. Enamiku ülesannete korral (v.a testid ja tõestusülesanded) on hindamisjuhiste lõpus eraldi näidatud, mitu punkti anda ainult õige vastuse eest. See hinne on mõeldud juhuks, kui töös on ülesande kohta toodud ainult õige vastus või õige vastus koos mõttekäiguga, mis ei annaks skeemi järgi rohkem punkte kui on ette nähtud õige vastuse eest.

6. Kahtlemata esineb õpilaste töödes ka mõttekäike, mis ei mahu meie poolt pakutud skeemidesse. Selliste lahenduste hindamisel tuleb lähtuda sellest, *kui suur osa* antud ülesandest on õpilasel lahendatud, kasutades lahenduse üksikute osade kaalu määramisel võimaluse korral võrdluseks punktide jaotust meie pakutud hindamisskeemides.

7. *Millise tahes* täieliku ja matemaatiliselt korrektse lahenduse eest tuleb igal juhul anda maksimumpunktid, sõltumata selle lahenduse pikkusest või otstarbekusest võrreldes teiste lahendusviisidega.

I osa hindamisjuhised

1.	∘ Antud õige vastus 4:	2 p
2.	∘ Antud õige vastus $\frac{4}{5}$ (või „kolmas“):	2 p
3.	∘ Antud õige vastus 9:	2 p
4.	∘ Antud õige vastus Anniki:	2 p
5.	∘ Antud õige vastus 6:	2 p
6.	∘ Antud õige vastus 340°:	2 p
	∘ Antud vastuseks 340 ilma ühikuta:	1 p
7.	∘ Antud õige vastus 24 cm^2:	2 p
	∘ Antud vastuseks 24 ilma ühikuta või vale ühikuga:	1 p
8.	∘ Antud õige vastus 125 cm^3:	2 p
	∘ Antud vastuseks 125 ilma ühikuta või vale ühikuga:	1 p
9.	∘ Antud õige vastus 7 m:	2 p
	∘ Antud vastuseks 7 ilma ühikuta või vale ühikuga:	1 p
	∘ Antud vastuseks 700 ilma ühikuta või vale ühikuga:	1 p
10.	∘ Antud õige vastus 30:	2 p

Eesti LX matemaatikaolümpiaad

19. jaanuar 2013 | Piirkonnavoor | **8. klass**

I osa hindamisjuhised

1.
- Antud õige vastus 33: 2 p

2.
- Antud õige vastus 4: 2 p

3.
- Antud õige vastus 20: 2 p

4.
- Antud õige vastus 95: 2 p

5.
- Antud õige vastus 36 €: 2 p
- Antud vastuseks 36 ilma ühikuta või vale rahaühikuga: 1 p

6.
- Antud õige vastus 20°: 2 p
- Antud vastuseks 20 ilma ühikuta: 1 p

7.
- Antud õige vastus 64 cm^2: 2 p
- Antud vastuseks 64 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

8.
- Antud õige vastus 16π cm: 2 p
- Antud vastuseks 16π ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p
- Antud vastuseks 50,24 või täpsem ligikaudne väärtus õige ühikuga või ilma ühikuta: 1 p

9.
- Antud õige vastus 8: 2 p

10.
- Antud õige vastus 54: 2 p

I osa hindamisjuhised

1. ◦ Antud õige vastus 37: 2 p

2. ◦ Antud õige vastus 6: 2 p

3. ◦ Antud õige vastus 12: 2 p

4. ◦ Antud õige vastus 119: 2 p

5. ◦ Antud õige vastus 109: 2 p

6. ◦ Antud õige vastus 100°: 2 p
◦ Antud vastuseks 100 ilma ühikuta: 1 p

7. ◦ Antud õige vastus 40 cm^2: 2 p
◦ Antud vastuseks 40 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

8. ◦ Antud õige vastus $\frac{2}{\pi}$ m^2: 2 p
◦ Antud vastuseks $\frac{2}{\pi}$ ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p
◦ Antud vastuseks 0,64 või täpsem ligikaudne väärtus õige ühikuga või ilma ühikuta: 1 p

9. ◦ Antud õige vastus 11: 2 p

10. ◦ Antud õige vastus 36: 2 p

II osa hindamisjuhised

1.
- Avaldatud mamma ja laste poolt kokku söödud ploomide arv ühe lapse söödud ploomide arvu (žürii lahenduses x) kaudu: 3 p
- Tingimusest, et papa sõi ülimalt pooled ploomid, leitud $x \geqslant 7$: 1 p
- Tingimusest, et papa sõi rohkem kui mamma, leitud $x \leqslant 7$: 1 p
- Järeldatud, et kumbki laps sõi täpselt 7 ploomi: 1 p
- Arvutatud papa söödud ploomide arv 33: 1 p

Õige vastuse 33 eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

Kui erinevate isikute poolt söödud ploomide arvud on väljendatud mõne muu suuruse, mitte ühe lapse söödud ploomide arvu kaudu nagu žürii lahenduses, siis kohandada toodud skeem vastavalt.

2.
- Märgitud, et kujundit piiravate ringjoone kaarte poolt määratavad sektorid moodustavad ringist veerandi: 2 p

  Sealhulgas:
  - Märgitud, et sektori nurk punkti A (või punkti C) juures on 90°: *1 p*
- Leitud kujundi ümbermõõt: 2 p
- Leitud kujundi pindala: 3 p

Kummagi osa õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Sulgude puudumise eest avaldise $8\pi - 16$ või ühiku ümber punkte mitte alandada. Ühikuga eksimisel või ligikaudse väärtuse kasutamisel anda selle osa vastuse eest 0 punkti.

3.
- Näidatud, et 4 õpilasest saab moodustada 6 paari: 1 p
- Märgitud, et kapten kuulub täpselt 3 paari: 1 p
- Eelnevale tuginedes leitud, et 7A klassi kapteni osalusel peeti täpselt 18 mängu ja ilma tema osaluseta samuti 18 mängu: 4 p

  Sealhulgas:
  - Leitud mängude koguarv 36, või leitud ainult kas kapteni osalusel või kapteni osaluseta peetud mängude arv 18: *2 p*
- Järeldatud, et turniir lõppes skooriga 18 : 18: 1 p

Õige vastuse 18 : 18 eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

II osa hindamisjuhised

1.
- Leitud kõigi kuue muutuja õige suurusjärjestus: 2 p
- Leitud $d = 2$: 1 p
- Leitud $a = 23$: 1 p
- Näidatud, et 5 antud arvude seas ei esine: 1 p
- Näidatud, et 3 ja 7 antud arvude seas ei esine: 1 p
- Leitud ülejäänud nelja muutuja väärtused: 1 p

Täieliku õige vastuse (selgesti tuvastatavalt kõigi kuue muutuja korrektsed väärtused) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti. Kui nelja või viie muutuja väärtused on õiged ja ülejäänud on puudu või valed, siis anda 1 punkt. Kui muutujate ja väärtuste vastavus pole selge (nt on loetletud ainult väärtused 2, 11, 13, 17, 19, 23), siis anda vastuse eest 0 punkti.

2.
- Näidatud, et $\angle CAD = \angle ACD = 60^\circ$: 1 p
- Järeldatud, et $|AC| = |AB|$: 1 p
- Leitud, et $\angle BAC = 30^\circ$: 1 p
- Leitud, et $\angle BCA = 75^\circ$ või $\angle CBA = 75^\circ$ (või mõlemad): 1 p
- Leitud, et $\angle ABD = 45^\circ$ või $\angle ADB = 45^\circ$ (või mõlemad): 1 p
- Arvutatud kolmnurga BCD nurkade suurused: 2 p

Täieliku õige vastuse (suurused 15°, 30°, 135° mingis järjestuses) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti. Kui kaks nurka on õiged ja kolmas puudu või vale, siis anda 1 punkt. Kui muidu õiges vastuses puudub ühel või enamal nurgal kraadimärk, siis anda 1 punkt.

3.
- Lahendatud a)-osa: 2 p
- Lahendatud b)-osa: 5 p

  Sealhulgas:
  - Tõestatud, et väiksemate taimede rühmas kõrgeima vähim võimalik pikkus on 34 cm: *2 p*
  - Järeldatud, et suuremate taimede rühmas nelja madalama vähimad võimalikud pikkused 35 cm, 36 cm, 37 cm ja 38 cm: *1 p*
  - Arvutatud vastav pikima taime pikkus 64 cm: *2 p*

Kui a)-osas on keskmine pikkus arvutatud tehtega $\frac{32\ \mathrm{cm} + 42\ \mathrm{cm}}{2}$, siis anda sellest osast täispunktid ainult juhul, kui on selgituseks mainitud, et rühmades on ühepalju taimi.

Kummagi osa õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Ühikuga eksimisel selle osa vastuse eest punkte mitte anda.

II osa hindamisjuhised

1. *Lahendus arvu $a+1$ analüüsiga (žürii lahendus 1).*

- Märgatud, et arv $2a+2$ on arvu $a+1$ täiskordne: 1 p
- Järeldatud, et arvud $2a+1$ ja $2a+3$ arvuga $a+1$ ei jagu: 1 p
- Näidatud, et 3 jagub arvuga $a+1$: 2 p
- Järeldatud, et $a=2$: 1 p
- Kontrollitud, et juhul $a=2$ on ülesande tingimused täidetud: 2 p

Lahendus arvu $a+3$ analüüsiga (žürii lahendus 2).

- Näidatud, et $2a+5$ ei saa jaguda arvuga $a+3$: 1 p
- Uuritud juhtu, kus arv $2a+3$ jagub arvuga $a+3$, ja jõutud vasturääkivuseni: 2 p
- Leitud, et juhul, kui arv $2a+1$ jagub arvuga $a+3$, peab arv 5 jaguma arvuga $a+3$: 1 p
- Järeldatud, et $a=2$: 1 p
- Kontrollitud, et juhul $a=2$ on ülesande tingimused täidetud: 2 p

Õige vastuse 2 eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2.
- Avaldatud võrrandist r, või viidud kõik liikmed ühele poole: 1 p
- Eraldatud täisruudud: 3 p

  Sealhulgas:
  - Liidetud võrrandi kummalegi poolele 2, või liidetud ja lahutatud 2: *1 p*
  - Rühmitatud liikmed täisruutude märkamiseks sobivalt: *1 p*
- Märgitud, et ruutude summa on mittenegatiivne: 2 p
- Tehtud lõppjäreldus: 1 p

3.
- Võetud kasutusele tähistused punkti Q kauguste kohta sirgetest AB ja CD (žürii lahenduses k ja l): 1 p
- Kolmnurkade ABQ ja CDQ võrdpindsusest jõutud võrduseni $ak=bl$: 1 p
- Märgitud, et ABQ ja CDQ pindalade summa on pool nelinurga $ABCD$ pindalast: 1 p
- Saadud võrdus $\frac{1}{2}ak+\frac{1}{2}bl=\frac{1}{2}al+\frac{1}{2}bk$ või mõni sellega samaväärne järeldus: 1 p

- Tegurdatud ja saadud võrdus $(a-b)(k-l)=0$: 1 p
- Järeldatud, et $a=b$ või $k=l$, ning leitud, et ka juhul $k=l$ kehtib $a=b$: 1 p
- Leitud otsitav suhe $\dfrac{a}{b}=1$: 1 p

Õige vastuse 1 eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

4.
- Kirjeldatud küünalde paigutamise viis, mis rahuldab kõiki ülesande tingimusi: 3 p
- Tõestatud, et tordi lõikamisel kaheksaks võrdseks sektoriks jääb vähemalt ühele tükile vähemalt 5 küünalt: 4 p

Kui on jäetud selgitamata, miks 9 küünalt tõepoolest mahub kaheksandikule tordi servast, siis selle eest mitte punkte alandada.

Õige vastuse „jah“ eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

Hindamisjuhised

1. *Lahendus ühe võrrandiga.*

- Koostatud õige võrrand kahtede või viite osakaalu suhtes: 4 p
- Võrrand õigesti lahendatud: 2 p
- Tehtud õige lõppjäreldus: 1 p

Lahendus võrrandisüsteemiga.

- Koostatud õige ja ammendav võrrandisüsteem kahtede ja viite osakaalude leidmiseks: 3 p

  Sealhulgas:
  - Kirjutatud võrrand, mis ütleb, et keskmine hinne oli 3: *2 p*
  - Kirjutatud võrrand, mis ütleb, et Juku kõik hinded olid kahed, kolmed, neljad ja viied: *1 p*
- Süsteemist õigesti leitud kas kahtede või viite osakaal: 3 p
- Tehtud õige lõppjäreldus: 1 p

Täieliku õige vastuse (40% kahtesid ja 10% viisi) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Osaliselt õige vastuse eest anda 0 punkti.

2.
- Avatud sulud ja koondatud sarnased liikmed: 2 p
- Viidud kõik liikmed ühele poole (olgu võrrandi pooled korrutatud x^2-ga või mitte): 2 p
- Leitud mõlemad lahendid: 3 p

  Sealhulgas:
  - Tundmatut sisaldav pool esitatud kaksliikme ruuduna: *1 p*
  - Leitud üks lahend: *1 p*

Täieliku õige vastuse (mõlemad sobivad x väärtused) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Ainult ühe õige lahendi eest anda 0 punkti.

3.
- Leitud, et täisarvude ruutude lõpus saab esineda täpselt 6 erinevat numbrit: 4 p

  Sealhulgas:
  - Kätte saadud täisarvude ruutude 6 erinevat võimalikku viimast numbrit: *2 p*
  - Veendutud, et muud numbrid pole võimalikud: *2 p*

- Järeldatud, et kuni 6 täisarvu ruudu seas ei tarvitse ühegi kahe vahe jaguda 10-ga: 1 p
- Järeldatud, et 7 täisarvu ruudu seas leidub kaks, mis lõpevad sama numbriga: 1 p
- Mainitud, et nende kahe vahe jagub 10-ga: 1 p

Skeemi esimese rea eest täispunktide saamiseks piisab kümne juhu väljakirjutamisest nagu žürii lahenduses. Alapunktide järgi hinnata juhul, kui ei ole kõik juhud läbi vaadatud.

Õige vastuse 7 eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

4.
- On olemas idee rühmitada tegureid ja hinnata nende korrutisi eraldi: 1 p
- Näidatud, et järjestikuste plussi ja miinusega kaksliikmete korrutis on suurem 1-st: 2 p
- Näidatud, et järjestikuste miinuse ja plussiga kaksliikmete korrutis on väiksem 1-st: 2 p
- Tõestatud üks võrratus: 1 p
- Tõestatud teine võrratus: 1 p

5.
- Mainitud, et $\angle ATB = 90^\circ$: 1 p
- Leitud $\angle TAB = 30^\circ$ ja $\angle TBA = 60^\circ$: 3 p

  Sealhulgas:
  - Leitud ainult üks neist nurkadest: *2 p*
- Leitud $\angle CBA = 75^\circ$ või $\angle BCA = 75^\circ$ (või mõlemad): 2 p
- Leitud otsitava nurga suurus 15°: 1 p

Õige vastuse 15° eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Kui 15 on ilma kraadimärgita, siis anda selle eest 0 punkti.

6.
- Näidatud, et ainult kolmest ühikruudust koosnevate nurgikutega pole katmine võimalik: 2 p
- Näidatud, et neljast ühikruudust koosnevaid nurgikuid peab olema vähemalt 3: 2 p
- Kirjeldatud ülesande tingimustele vastav katmine, mis kasutab täpselt 3 neljast ühikruudust koosnevat nurgikut: 3 p

Õige vastuse 3 eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

Eesti LX matemaatikaolümpiaad

19. jaanuar 2013 Piirkonnavoor **11. klass**

Hindamisjuhised

1.
- Leitud, et ühegi $x < 0$ korral pole võrrand rahuldatud: 1 p
- Näidatud, et piirkonnas $[0; 1)$ lahendeid pole: 3 p
- Näidatud, et kõik arvud $x \geqslant 1$ sobivad: 3 p

Täieliku õige vastuse (kõik $x \geqslant 1$) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2. *Lahendus võrrandiga kuusnurga küljepikkuse suhtes (žürii lahendus 1).*
- Koostatud õige võrrand kuusnurga küljepikkuse suhtes: 4 p
- Võrrand lahendatud: 2 p
- Leitud x väärtus: 1 p

Lahendus võrrandiga x suhtes (žürii lahendus 2).
- Koostatud õige võrrand x suhtes: 4 p
- Võrrand lahendatud: 3 p

Õige vastuse $8\sqrt{3}$ eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Ebakonventsionaalsete kujude ($\frac{24}{\sqrt{3}}$ jms) kasutamise eest punkte mitte alandada. Ligikaudse vastuse eest anda 0 punkti.

3.
- Saadud seos $2013 = m^2 + 2m\sqrt{n}$ või seos $2013 = m\left(m + 2\sqrt{n}\right)$ samaväärsena ülesande tingimusega $\sqrt{n + 2013} - \sqrt{n} = m$: 3 p
- Järeldatud, et $\sqrt{n}$ on täisarv: 2 p
  Sealhulgas:
  - Järeldatud, et $\sqrt{n}$ on ratsionaalarv: *1 p*
- Vaadatud läbi kõik juhud ja leitud õiged väärtused: 2 p

Kui võrduse $2013 = m^2 + 2m\sqrt{n}$ või $2013 = m\left(m + 2\sqrt{n}\right)$ tuletamisel pole selge samaväärsus algse võrdusega $\sqrt{n + 2013} - \sqrt{n} = m$, siis anda skeemi esimese rea järgi 1 punkt vähem. Samaväärsus lugeda piisavalt selgeks, kui näiteks ruututõstmiste juures on mainitud poolte positiivsust või kui lõpus on tehtud saadud lahendite kontroll algse võrduse suhtes.

Kui vastuses on püütud ruute välja arvutada ja tehtud seejuures arvutusvigu, siis selle eest punkte mitte alandada.

Täieliku õige vastuse (14^2, 86^2, 334^2, 1006^2) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Osaliselt õige vastuse eest anda 0 punkti.

4.
- Koostatud ruutvõrrand otsitava suuruse leidmiseks: 3 p
  Sealhulgas:
  - Tuletatud seos $\sin\alpha = \cos^2\alpha$: *1 p*
  - Sellest omakorda tuletatud seos $\sin\alpha = 1 - \sin^2\alpha$: *1 p*
- Ruutvõrrand lahendatud: 2 p
- Põhjendatud ühe lahendi mittesobivus: 2 p

Õige vastuse $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Ligikaudse vastuse eest anda 0 punkti.

5.
- Märgitud, et C_2B_1 ja B_2C_1 on kolmnurga AB_2C_2 mediaanid: 2 p
- Järeldatud, et D on kolmnurga AB_2C_2 mediaanide lõikepunkt: 1 p
- Järeldatud, et lõigu AD pikendus on kolmnurga AB_2C_2 kolmas mediaan: 1 p
- Märgitud, et sirged (lõigud) BC ja B_2C_2 on paralleelsed, või et kolmnurgad ABC ja AB_2C_2 on sarnased: 1 p
- Lahendus korrektselt lõpule viidud: 2 p

6.
- Lahendatud a)-osa: 3 p
- Lahendatud b)-osa: 4 p
  Sealhulgas:
  - Leitud käikude koguarv $m + n - 1$: *1 p*
  - Kirjeldatud strateegia korjata igal käigul peale viimase kaks ühesugust münti: *1 p*
  - Arvutatud saagi väärtus selle strateegia jaoks: *1 p*
  - Korralikult põhjendatud, miks see strateegia on parim: *1 p*

Kummagi osa täieliku õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt, osaliselt õige vastuse eest 0 punkti. Kui b)-osa vastuses puudub ühik „hõbemünti“, siis selle eest punkte mitte alandada.

Hindamisjuhised

1.
- Rakendatud vahe ja summa siinuse valemit: 2 p
- Jõutud edasi võrduseni $\sin\alpha = \frac{1}{2}$: 3 p

  Sealhulgas:
  - Koondatud sarnased liikmed: *1 p*
  - Jagatud suurusega $\cos 45^\circ$ ja kasutatud, et $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$ (või et $\tan 45^\circ = 1$): *1 p*
- Saadud õige lõppvastus: 2 p

Skeemi esimese rea eest anda punkte ainult siis, kui valemid on ülesande võrrandi kontekstis rakendatud. Ainult valemi väljakirjutamise eest anda 0 punkti.

Kui kõigist sobivatest väärtustest on osa leitud ja osa puudu, siis anda skeemi viimase rea eest 1 punkt vähem.

Täieliku õige vastuse (lahendite pere) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Osalise vastuse eest anda 0 punkti.

2.
- Tähistatud puutepunkti x-koordinaat (žürii lahenduses c): 1 p
- Leitud graafikute ühise punkti järgi sirge tõus $\frac{\ln c}{c}$: 2 p
- Tuletise abil leitud puutuja tõus $\frac{1}{c}$: 2 p
- Koostatud õige võrrand ja leitud sealt $c = \mathrm{e}$: 1 p
- Antud õige lõppvastus: 1 p

Täieliku õige vastuse (mõlemad koordinaadid) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Kui kasvõi üks koordinaat on vale või ligikaudne või on koordinaadid vales järjekorras, siis anda vastuse eest 0 punkti.

3. *Lahendus võrrandite liitmisega (žürii lahendus 1).*
- Võrrandite vastavad pooled liidetud: 1 p
- Vasak pool esitatud kaksliikmete ruutude summana: 1 p
- Järeldatud, et $|x+u| \leqslant 1$ ja $|x+v| \leqslant 1$: 1 p
- Välistatud juhud $x+u=0$ ja $x+v=0$: 1 p
- Välistatud juhud, kus $x+u=x+v$: 1 p
- Lahendus lõpule viidud: 2 p

Lahendus võrrandite lahutamisega (žürii lahendus 2).

- Võrrandite vastavad pooled lahutatud: 1 p
- Vasak pool tegurdatud: 1 p
- Saadud võrdus $x = \frac{u+v}{2}$ või samaväärne seos: 1 p
- Asendatud see algsesse võrrandisse ja lihtsustatud: 1 p
- Lahendus lõpule viidud: 3 p

  Sealhulgas:
  - Eraldatud võrrandis $5u^2 + 6uv + 5v^2 = 0$ täisruudud: *1 p*
  - Leitud võimalused $u + v = 0$, $u - v = \pm 2$: *1 p*

Lahendus diskriminantide analüüsiga (žürii lahendus 3).

- Toodud võrrandite kõik liikmed ühele poole ja kirjutatud välja kas diskriminandid või lahendivalemid kummagi ruutvõrrandi jaoks: 1 p
- Märgitud, et diskriminandid peavad olema täisarvude ruudud: 1 p
- Järeldatud, et u^2 ja v^2 erinevad ülimalt 1 võrra: 1 p
- Välistatud muud juhud peale $u^2 = v^2$: 1 p
- Järeldatud $v = -u$: 1 p
- Asendatud see algsesse süsteemi, lahendatud ja jõutud õige lõppvastuseni: 2 p

Täieliku õige vastuse ($(1, -1)$ ja $(-1, 1)$) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Ainult ühe õige paari eest anda 0 punkti.

4.
- Tõestatud võrratustega, et $2x + 1 = 0$: 4 p
- Leitud siit $x = -\frac{1}{2}$: 1 p
- Kontrollitud, et $x = -\frac{1}{2}$ rahuldab võrrandit: 2 p

Õige vastuse $x = -\frac{1}{2}$ eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

5.
- Mainitud, et ühispuutujate lõikepunktid on võrdkülgse kolmnurga tippudeks parajasti siis, kui väliste ühispuutujate vaheline nurk on suurusega 60°: 1 p
- Tõestatud, et kui väliste ühispuutujate vaheline nurk on suurusega 60°, siis $r_2 = 3r_1$: 3 p
- Tõestatud, et kui $r_2 = 3r_1$, siis väliste ühispuutujate vaheline nurk on suurusega 60°: 3 p

Kui töös opereeritakse väliste ühispuutujate vahelise nurga asemel poolnurgaga (nagu ka žürii lahenduses), siis kasutada hindamiseks sama skeemi, kuid asendada skeemi kõigis ridades 60°-se nurga väide vastava 30°-se poolnurga väitega.

6.
- Kirjeldatud strateegia vastata igale vastase käigule ruudustiku keskpunkti suhtes sümmeetrilise käiguga: 2 p
- Näidatud, et kui m ja n pole mõlemad paaris, siis alustaja saab esimesel käigul sümmeetria säilitada: 1 p
- Näidatud selle strateegia rakendatavus ja võitvus kas alustaja vastase jaoks paaris m ja n korral või alustaja jaoks pärast tema esimest käiku ülejäänud juhtudel: 3 p
- Mainitud, et läbi vaatamata juhul võidab sama strateegiaga teine mängija: 1 p

Täieliku õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

Kokkuvõtteks

Liiga raskeks osutusid 11. klassi, eriti aga 9. klassi ülesanded. 11. klassi komplekt osutus arvatust raskemaks just tugevamate õpilaste jaoks — maksimaalseks punktisummaks jäi 38 punkti — ning tippudele järgnevate õpilaste pingereas on langus sujuv. Kuid 9. klassi komplekt oli nii raske, et õpilased, kellele pärast üleriigilise žürii poolset üleparandamist jäid alles üle poole maksimumpunktidest, pääsesid lõppvooru. Raskeks osutusid kõik ülesanded peale neljanda. Isegi testis kogusid vähesed oluliselt üle poole punktidest.

Väga raskeks osutus ka 10. klassi 4. ülesanne, kuid teised ülesanded olid paljudele tehtavad ja komplekti tervikuna võib mõistlikuks pidada. Õnneks olid kõigi keskkooliklasside „kooliülesanded“ (1. ja 2.) jõukohased ja hästi lahendatud.

Sel aastal vaatasid üleriigilise žürii 8.–12. klassi parandajad läbi kõigis töödes kõik ülesanded. 7. klassi parandajad vaatasid läbi kõik ülesanded nende õpilaste töödes, kes kutsutakse huvipäevale; mitte keegi, kelle töös mõni ülesanne on jäänud läbi vaatamata, ei pääseks huvipäevale ka siis, kui ta kõigi läbi vaatamata jäänud ülesannete eest saaks maksimumpunktid. Läbi vaatamata jäänud ülesanded on eristatud oranži taustavärviga.

Kontrollijate kommentaarid (Reimo Palm, Ago-Erik Riet)

Test

Ülesanne 1 osutus lahendajatele ootamatult raskeks, mitmel korral pakuti vastuseks arvule 2013 lähedasi arve.

Ülesannete koostajale soovitaks olla haruldaste eesnimedega ettevaatlikum. Ülesandes 4 andsid paljud vastuseks Annik või Annika, koostaja mõtte järgi oli see ilmselt Anniki. Punkte selle nime teistsuguste kujude eest maha ei võetud, kui isik oli üheselt tuvastatav.

Ülesandes 8 esines teinekord viga, kus astendaja 3 asemel kirjutati astendajaks 2. Vastavalt hindamisskeemile võeti selle eest 1 punkt maha.

Ülesanne 1

Ülesannet oli piirkondades parandatud kui raskuse poolest keskmist. Üleparandamisel siiski enamasti punktide arvu vähendati.

Tüüpviga oli, et, kui oli leitud ja kontrollitud õige vastus $x = 7$, siis loeti sellega ülesanne lahendatuks. Tegelikult on kontrollimisel, et muud täisarvud x väärtuseks ei sobi, väga oluline osa ülesande lahendamises. Arusaamine, et tuleb tõestada kaks võrratust, ja selle teostus olid komistuskiviks enamuses töödes. Märgime, et ka žürii poolt koostatud hindamisskeemi neljanda rea (järeldatud, et kumbki laps sõi täpselt 7 ploomi) alusel andsime ettenähtud punkti ainult juhul, kui need võrratused olid põhjendatud.

Toome ära kaks lisaskeemi, mida kasutasime tüüpiliste tööde hindamiseks.

1. Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt (punktid ei summeeru):

- Järeldatud ainult üks võrratustest $x \geqslant 7$ ja $x \leqslant 7$, vaadeldud vastavalt juhtu $x = 8$ või $x = 6$ ja näidatud, et see ei sobi, kontrollitud juhu $x = 7$ sobivust ja leitud õige vastus: 6 p
- Vaadeldud juhte $x = 6, 7, 8$, aga mitte tõestatud vastavaid võrratusi, kontrollitud juhu $x = 7$ sobivust ja leitud õige vastus: 5 p
- Tõestatud ainult üks võrratustest $x \leqslant 7$ ja $x \geqslant 7$, kontrollitud juhu $x = 7$ sobivust ja leitud õige vastus: 5 p

- Vaadeldud üht või kaht juhtudest $x = 6, 7, 8$, aga mitte tõestatud vastavaid võrratusi, kontrollitud juhu $x = 7$ sobivust ja leitud õige vastus: 4 p

Kõigis ridades eeldatakse, et on avaldatud mamma ja laste söödud ploomide arv ühe lapse söödud ploomide arvu x kaudu nagu žürii lahenduses.

2. Järgneva osalise tüüplahenduse märgitud osade eest antud punktid summeeriti:

- Leitud, et papa sööb 37 ploomi või vähem: 1 p
- Tõestatud, et juht $x = 7$ sobib: 1 p
- Arvutatud papa söödud ploomide arvuks 33: 1 p
- Vaadeldud juhtu $x = 6$ või $x = 8$, aga mitte mõlemat: 1 p

Ülesanne 2

Ülesanne osutus päris raskeks. Jäi mulje, et vajalikke valemeid tunti, aga ei osatud neid uudses olukorras kasutada. Huvitaval kombel kasutati õpilaste töödes palju avaldisi stiilis $\pi 4$ või $\pi 16$, selle asemel et kirjutada 4π või 16π.

Piirkondade hindajad olid kõik teinud tublit tööd, valdav enamus punktimuutusi olid ühtlustamised 1 punkti piirides.

Paljud kirjutasid a)-osa vastuse ühikuks cm^2 (tehes enne arvutusi hoopis ilma ühikuta). Vastavalt hindamisskeemile võeti selle eest 1 punkt maha.

Õige, aga mõistlikult lihtsustamata vastuse eest võeti igal pool 1 punkt maha, sest enamasti oli ka piirkondades lihtsustamata vastuse eest 1 punkt maha võetud.

Kui ligikaudne oli mõlema osa vastus, siis lahutati mõlema osa tulemusest 1 punkt, nagu nõuab ka hindamisskeem.

Ülesanne 3

Ülesanne oli kolmest kõige lihtsam. Enamasti oli õigesti leitud mängude arv 36 ja kapteniga mängude arv 18. Kui ühe klassi õpilaste paaride loendamisel oli saadud 6, aga ei olnud seda põhjendatud, siis võeti maha 1 punkt. Mõnikord oli paare loendatud õigesti, aga mängude arv oli leitud valesti – need lahendused said tüüpiliselt 2 punkti. Kui lõppvastuses ega arvutuskäigus ei olnud öeldud, et skoor on 18:18, siis võeti maha 1 punkt.

Nagu eelmiseski ülesandes, olid piirkondade hindajad teinud tublit tööd ja punktimuutused olid valdavalt ühtlustamised 1 punkti piires.

Kontrollijate kommentaarid (Maksim Ivanov, Laur Tooming)

Test

Peaaegu kõik õpilased vastasid õigesti ülesannetes 1 ja 6, testi raskeimad ülesanded olid aga nr 2, 3, 9 ja 10. Ülesandes 8 unustati sageli vastuses ühik kirjutamata, palju esines ka π lähisväärtuse 3,14 kasutamist, kui õige oleks olnud vastusesse π sisse jätta. Samas ülesandes 7 ei jätnud peaaegu ükski õpilane ühikut ära.

Punktimuutusi oli vähe. Paaril õpilasel tuli hindamisskeemi järgi vähendada punktide arvu 1 võrra, st anda mõnes ülesandes 2 asemel 1 punkt.

Ülesanne 1

Enamikus meile saadetud töödest oli tegu täislahendusega; praktiliselt kõik said aga vähemalt 3 punkti, kuna oli leitud arvude järjestus ja sellest $a = 23$. Suurusjärjestuse põhjendust meie ei nõudnud, kuigi mõnes piirkonnas oli selle eest 1 punkt maha arvatud. Rõõmustas, et õpilased tundsid üldiselt hästi algarvu mõistet ja loetlesid õigesti algarvud 23-ni. Tihti peeti küll ka arvu 1 algarvuks, aga kuna see eksimus käesoleva ülesande vastust ei mõjuta, ei karistanud me selle eest üldiselt. Halvemini läks paaril õpilasel, kes arvasid, et 2 ei ole algarv.

Enamik punktimuutusi olid väikesed ja põhjustatud hindamise ühtlustamisest. Mõnes piirkonnas aga oli antud 7 punkti ka töödele, kus olid proovimise teel leitud muutujate väärtused, aga põhjendamata oli, miks tegu on ainsa lahendiga; nendelt töödelt pidime punkte vähemaks võtma.

Ülesanne 2

Geomeetriaülesanne oli seekord väga hästi lahendatud. Enamik õpilasi olid avastanud nii võrdkülgse kolmnurga ACD kui ka võrdhaarsed kolmnurgad ABD ja BAC ning nende kaudu vastuseni jõudnud. Seepärast sõltus punktide arv rohkem sellest, kuivõrd põhjalikult olid lahenduskäigus tehtud sammud selgitatud. Näiteks ei piisanud täispunktide saamiseks väitest „jooniselt näeme, et kolmnurk ACD on võrdkülgne“. Mõned üksikud õpilased olid vastuse saanud nurkade mõõtmise teel; selle eest said nad ainult hindamisskeemis ettenähtud 2 punkti.

Ülesanne 3

Umbes pooled õpilased leidsid ülesande osas a) küsitud kõigi 10 taime keskmise pikkuse tehtega $\frac{32+42}{2}$ ja enamik neist ei põhjendanud, miks seda oli võimalik niimodi arvutada. Vastavalt hindamisskeemile said kõik need õpilased osa a) eest 1 punkti.

Ülesande osa b) oli parandaja arvates ootamatult hästi lahendatud — enamik õpilasi leidsid pikima taime pikkuse õige väärtuse. Samas täispunkte selle osa eest paljud ei saanud, kuna ei suutnud piisavalt hästi põhjendada/tõestada, miks väiksemate taimede rühmas pikima taime vähim võimalik pikkus on 34 cm.

Kontrollijate kommentaarid (Indrek Zolk, Kalle Kaarli)

Ülesanne 1

Ülesanne oli hea, kuid kahjuks oma täies ulatuses jõukohane ainult vähestele. Kuna ainult üksikud õpilased olid järginud žürii pakutud lahendusvariante, ei võrrelnud me üldse kohapeal teostatud hindamist žürii hindamisskeemiga. Tüüpiline lahendaja märkas (ja põhjendas), et a peab olema paarisarv ja et üheks sobivaks lahendiks on $a = 2$. Seda hindasime 3 punktiga. Katsed kaugemale minna olid enemikul juhtudel abitud. Väga tihti püüti kuidagi kasutada algarve, kuigi vajadust ja praktiliselt ka võimalust selleks ei olnud. Näiteks tuli välja, et terve rida õpilasi erinevatest koolidest tunneb „teoreemi“: kolmest järjestikusest paaritust arvust vähemalt üks on algarv.

Torkas silma õpilaste oskamatus end korrektselt väljendada. Näiteks tihti nimetati matemaatilisi avaldisi teheteks, räägiti avaldise väärtuse asemel tehte vastusest jms. Siiski leidus lahendajaid, kes suutsid lahendusega korrektselt lõpuni minna, ja ka neid, kelle idee oleks seda võimaldanud. Sõltuvalt idee potentsiaalsest viljakusest ja sellest, kui kaugele jõuti, panime kokkuvõttes 4–7 punkti. Kahju on sellest, et ülekaalukalt tulid parimad lahendused Tallinnast. Kohtadel parandamine oli keskmine või alla selle. Tugevasti oli üle hinnatud Järvamaal, tugevasti alla aga Tallinnas.

Ülesanne 2

Lõviosa lahendajaid sai punkti skeemi esimese rea (r avaldamine või kõigi liikmete ühele poole viimine) eest.

Ülesandel on lisalahendusi, mis seisnevad funktsiooni $f(x) = x(x-2)$ graafiku käigu uurimises. Täisruudu $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ uurimise, funktsiooni f tuletise abil tema ekstreemumi leidmise või parabooli haripunkti (x-koordinaat on nullkohtade poolsumma, y koordinaat on $f(x)$) arvutamise teel saab näidata, et $f(x) \geqslant -1$ iga x korral. Siit järeldub juba kergesti otsitav tulemus $-2 \leqslant f(x) + f(y) = r$.

Toodud lisalahenduste valguses anti hindamise ühtlustamisel punkte järgmiselt (variandid on teineteist välistavad):

- esineb tahtlus uurida funktsiooni f käitumist, aga hinnangut $f(x) \geqslant -1$ ei mainita — 1 punkt;
- on püstitatud hüpotees, et $f(x) \geqslant -1$ iga x korral — 2 punkti.

Selle hüpoteesi tõestamiseni jõudsid vähesed lahendajad.

Terve rida lahendajaid oli uurinud avaldise väärtust mingite üksikute (täisarvuliste) x ja y korral. Samuti uuriti eraldi juhtusid, kus $x < 0$ ja $y < 0$, kus $x > 2$ ja $y > 2$ jne. Selline juhtude läbivaatus ei lihtsusta kuidagi üldjuhu lahendamist, seega punkte selle eest hindamise ühtlustamisel ei antud.

Hoolimata sellest, et täisruuduks teisendamine ja ruutfunktsiooni uurimine on õpitud asjad, osutus ülesanne lahendajatele võrdlemisi raskeks.

Ülesanne 3

Ülesanne osutus lahendajatele raskeks.

Žürii toodud skeemis on õigupoolest kaks sõltumatut haru. Esimene haru võimaldab saada 7 punkti, teine (hinnatav ainult õige vastus) 1 punkti. Nagu tavaks, hinnati iga tööd selle haru järgi, kust võib saada rohkem punkte. Seejuures 1-punktise haru eest anti punkt ainult juhul, kui lahendaja pidas võimalikuks ainult suhet 1. Nii mõnigi lahendaja pakkus ka suhet $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{x}$ vms – sellised mitme võimalusega vastused „ainult vastus“ haru eest punkti ei saanud.

Ülesanne 4

Ehkki komplektis oli lihtsaid ülesandeid puudus, oli meie meelest ka see ülesanne ebaõnnestunud, kuna osutus liiga lihtsaks ja ei eristanud hästi osavõtjaid. Enamus lahendajaid märkas, et ühele tordilõigule mahub vabalt 9 (isegi 12) küünalt ja nendest suur osa nägi ka kohe ära, et kui 9 küünalt ühele lõigule paigutada, siis on ülesande nõue täidetud.

Kõigile, kes paigutasid küünlad tihedalt või ilma vahedeta ning tegid ka illustreerivad joonised, jätsime alles 7 punkti või tõstsime hinde 7 punktini. Mõned lahendajad mõtlesid tõenäoliselt sama asja, kuid olid selgitustes ebamäärasemad. Näiteks öeldi, et küünlad tuleb paigutada järjest või järjestikku. Kui selgitavat joonist ka ei olnud, siis panime 5 punkti.

Oli ka neid, kes pakkusid välja kavalamaid paigutusi, mis kõik ei sobinud. Seega teatud eristumine siiski toimus.

Kontrollijate kommentaarid (Raul Kangro, Aleksei Lissitsin)

Ülesanne 1

Sagedane viga siin oli eeldada, et hindeid on kokku mingi täisarv (kas 10 või 100) ja kasutada jaguvuse omadusi selleks, et määrata, kui palju oli kahtesid ja viiesid. Sellised lahendused ei saanud rohkem kui 4 punkti.

Ülesanne 2

Ülesanne oli enamasti korrektselt lahendatud ning ka parandajad järgisid enamasti hindamisskeemi. Seetõttu oli punktimuudatusi vaja teha vähe (4) ja need ei olnud tingitud otseselt parandamise vigadest, vaid just tehtud eksimuste erineva rangusega karistamistest. Välja tasub ehk tuua, et päris mitmetel õpilastel ei ole ruutjuure mõiste selge (kirjutati stiilis $x = \sqrt{1} = \pm 1$, st arvati, et ruutjuurel on kaks võimalikku väärtust). Kuna aga enamikus töödest ei olnud parandajad sellise eksimuse eest punkte maha võetud, siis loeti ka ühtlustamisel lahendused, kus selline kirjapilt esines, täispunktide vääriliseks.

Ülesanne 3

Žürii poolt pakutud lahendus oli kõige levinum. Kuid esinesid ka täislahendused, mis lahutuse $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ abil jagasid arvude viimased numbrid 6 paariks $(0,0)$, $(1,9)$, $(2,8)$, $(3,7)$, $(4,6)$ ja $(5,5)$ nii, et kahe arvude ruutude vahe jagub kümnega parajasti siis, kui nende viimased numbrid on ühest ja samast paarist.

Ülesanne 4

Tegemist oli komplekti raskeimaks osutunud ülesandega, millel täielikke lahendusi oli ainult kaks. Punktimuudatusi tuli palju, kuna sageli anti piirkondlike parandajate poolt punkte lihtsalt millegi tegemise eest isegi juhul, kui korrektse lahenduse jaoks vajalikke ideid kirjas ei olnud. Ühtlustamise käigus viidi punktid vastavusse hindamisskeemiga ning seetõttu juhul, kui õpilasel ei olnud selgelt välja toodud ideed tegureid paarikaupa selge eesmärgiga rühmitada, ta punkte ei saanud.

Levinud valed lahendused põhinesid arvamusel, et sellest, et järjestikused tegurid on ühele järjest lähemal, saab järeldada väidete kehtimise. See arvamus on vale, kuna näiteks $\left(1+\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right) < 1$, kuid lahenduse seisukohalt on hädavajalik, et selliste (kus esimene on plussiga ja teine miinusega) järjestikuste liikmete korrutis on ühest suurem.

Ülesanne 5

Suurim osa lahendajaid kasutas žürii poolt pakutud skeemi, kusjuures seose $\angle TAB = 30^\circ$ või mõne samaväärse võrduse näitamiseks kasutati erinevaid vahendeid: siinust, koosinust, tangensit ja isegi fakti, et täisnurgast tõmmatud mediaan on niisama pikk kui pool hüpotenuusi. Lahendused, kus $\angle TAB = 30^\circ$ ega samaväärset võrdust polnud põhjendatud, said reeglina 4 punkti.

Samuti levinud olid lahendused, kus leiti, et $\tan \angle TBC = 2 - \sqrt{3}$. Need lahendused ei saanud rohkem kui 5 punkti.

Ülesanne 6

Ülesanne oli keskmise raskusega. Enamik õpilasi sai aru, et vajalik neljaste nurgikute arv on 3, ning tõi vastava konstruktsiooni. Lahendusskeemi esimese ja teise osa põhjendustega aga jäid paljud hätta. Esimeses osas (kus tuli näidata, et ainult kolmestest nurgikutest ei piisa) oli tüüpiliseks lahenduseks väide, et need nurgikud tuleb paarikaupa 2×3 ristkülikuteks ühendada ning kuna selliste ristkülikutega saab täita ainult $3 \times (2n)$ ruudustikke, siis ainult kolmestest ei piisa. Samas ei toodud põhjendust, miks tingimata peab kolmesed nurgikud ühendama 2×3 ristkülikuteks, st miks ükski muu ühendamismoodus ei ole võimalik, kui me tahame tervet ala täita. Sellise lahenduse eest olid piirkondade parandajad andnud punkte 0st 2ni, ühtlustamise käigus loeti toodud arutelu väärtuseks 1 punkt. Teine osa (miks vähemalt 3 nelikut on vaja) oli paljudes töödes põhjendamata või siis tasemel „vähem lihtsalt ei saa, muidu tekivad augud või lähevad nurgikud üle serva“ põhjendatud. Kahjuks olid piirkondade parandajad sageli ka sellistele töödele andnud maksimumpunktid, mistõttu nii mõnegi töö selle ülesande punktisumma kahanes vähemalt kahe ning ning juhul, kui esimese osa puuduliku põhjenduse eest oli antud samuti täispunktid, vähemalt kolme punkti võrra.

Kontrollijate kommentaarid (Härmel Nestra, Ivo Adermann)

Ülesanne 1

Ülesanne oli lihtne ja valdavalt õigesti lahendatud. Suurimad punktierinevused esialgsete parandajate suhtes tekkisid äärmiselt napisõnaliste lahenduste hindamisel. Juhtudel, kui õpilane polnud avaldistele juurde kirjutanud, milliseid muutuja väärtuste piirkondi ta parasjagu vaatab, ning kui ta polnud teinud saadud tulemustest mingisuguseid järeldusi (või oli ainult lõppu lõppvastuse kirjutanud), ei saanud lahendus üle 4 punkti.

Ülesanne 2

Ülesanne oli hästi lahendatud ja ka punktiparandusi oli vähe. Töid, kus vastus muutus valeks lahenduse algul tehtud näpuvea tõttu, oli piirkondades hinnatud 1 kuni 6 punktiga. Andsime sellistele töödele 5 punkti, kui vea parandamisel oleks õige lahendus samal viisil välja tulnud. Kui näpuvigu oli rohkem või nad muutsid lahenduse kulgu põhimõtteliselt, siis andsime vähem punkte.

Ülesanne 3

Ühtegi täislahendust ei esinenud ja ainult ühes töös suudeti ära põhjendada, miks $\sqrt{n}$ peab täisarv olema. Nii mõneski lahenduses oli algne võrrand kohe ruutu tõstetud, mispeale tekkinud võrrandiga edasi midagi teha ei olnud, mistõttu tööd, kus kaugemale ei jõutudki, hinnati 0 punktiga — samas olid mõned parandajad eelnevalt selle eest ka 1–2 punkti andnud. Kõige parem oleks olnud $\sqrt{n}$ enne ruutu tõstmist teisele poole viia, sest siis tekkiv võrdus laseb näidata, miks $\sqrt{n}$ peab täisarv olema ning sealt saab ka arvu 2013 tegurite läbiproovimisega leida kõik lahendid.

Osa parandajaid olid lugenud piisavaks, kui lihtsalt mainiti, et $\sqrt{n+2013}$ ning $\sqrt{n}$ peavad täisarvud olema, sest nende vahe on täisarv, kuid siin üksnes mainimisest ei piisa. Enim esines lahendusi, kus jätkati sellega, et võeti juured võrdseks a-ga ja b-ga ning pärast ruutu tõstmist saadi võrdus $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) = 2013$, kust pärast 2013 tegurdamist leiti lahendeid. Kuna aga polnud näidatud, miks a ja b naturaalarvud peavad olema, siis ükski selline lahendus üle 5 punkti ei saanud. Hämmastavalt vähestes töödes oli arvestatud arvu 2013 kõigi kaheksa positiivse teguriga, mistõttu jäi neljast vastusest enamasti mõni leidmata.

Ülesanne 4

Ülesanne polnud keeruline ning oli valdavalt ära lahendatud, ehkki paljudes töödes olid jäetud mõlemad ruutvõrrandi lahendid ülesandele vastuseks, olgugi et neist üks oli väiksem kui -1, mistõttu see siinuse väärtuseks ei sobi. Mõni õpilane tegi ka joonise ning üritas ligikaudset vastust sealt välja lugeda, kuid joonist siin ülesandes kindlasti vaja ei läinud.

Ülesanne 5

Ka selles ülesandes polnud palju punktiparandusi vaja teha. Õpilastele osutus see ülesanne siiski üsna raskeks, päris paljud said 0 punkti. Jäi mulje, et sõnastus vektoritega ajas õpilasi segadusse, sest reas töödes püüti lahendada vale joonise järgi.

Ülesanne 6

Selles ülesandes alandasime enamikul töödel piirkonnas antud punkte, sest meie arvates ei olnud kirja pandud põhjendused küllaldased.

Näiteks a-osas oli rida õpilasi oma õiget vastust põhjendanud mingi konkreetse noppimiste järgnevusega, kuid et küsimus käis üldjuhu kohta, said sellised tööd meilt a-osa eest vaid 1 punkti. Mõni õpilane oli seejuures küll kirjutanud juurde „puusse jääv münt ei sõltu käikude valikust“ vms, kuid polnud seda kuidagi põhjendanud.

Veelgi rohkem oli segaseid ja ebatäielikke põhjendusi antud b-osas. Ootamatult paljud polnud märganud, et käikude arv on 1 võrra väiksem müntide arvust, ja vaatlesid saagi kasvamist piiramatu geomeetrilise jadana protsessis, kus algul nopitakse kõik hetkel olemasolevad (kindlat liiki) mündid, siis vahepeal juurdetekkinud mündid, seejärel omakorda teisel etapil juurdetekkinud mündid jne. Valdav enamik nii lähenenud õpilastest ei jõudnud õige vastuseni ja sellisel ideel põhinev lahendus on ka põhimõtteliselt ebakorrektne, kuna müntide arvud ei tarvitse täpselt pooleks jaguda ja see protsess ei ole tegelikult lõpmatu.

Kontrollijate kommentaarid (Urve Kangro, Kairi Kangro)

Ülesanne 1

Tegu oli komplekti kergeima ülesandega ja enamasti õpilastele probleeme ei valmistanud. Punkte kaotati selle eest, kui osad õiged lahendid puudu olid. Lisaks võeti punkt maha selle eest, kui arkussiinuse valemis oli jäetud märkimata, et n peab olema täisarv.

Ülesanne 2

Ülesanne oli üldiselt hästi lahendatud ja ka hästi parandatud, Ühtlustamist oli vaja vaid üksikutes töödes. Üheks sagedamini esinevaks veaks oli võrdusest $\ln c = 1$ järeldamine, et $c = 1$ või $c = 10$.

Ülesanne 3

Ülesannet võis lahendada väga erinevatel viisidel. Kõiki žürii lahendusi esines ja palju oli ka kombineeritud lahendusi, milles oli osi mitmest eri lahendusvariandist.

Üks sageli esinev viga oli see, et saadi mingi tingimus u ja v kohta ning selle asemel, et kontrollida, kas sel juhul on mõlemad esialgsed võrrandid lahenduvad, oli lahendatud ainult näiteks esialgsete võrrandite lahutamisel saadud võrrand. Nii saadi tulemuseks näiteks, et kõik paarid, kus $v = -u$, sobivad, või et kõik paarid, kus $v = u + 2$, sobivad.

Samuti esines mitmeid lahendusi, kus kasutati Viete'i valemeid, võttes eelduseks, et esialgsete võrrandite mõlemad lahendid on samad. Sellest aga järeldub juba, et $u = v$, mis polnud ülesande tingimuste kohaselt lubatud. Samas olid mõnedes sellistes töödes siiski õige vastus saadud, olles unustanud poole pealt mõne tingimuse ära, ja mõnikord oli sellise lahenduse eest ka täispunktid pandud.

Mõnedes töödes oli ka poole lahenduse pealt põhjendamatuid eeldusi tehtud, näiteks võetud ilma põhjenduseta $x = 0$, või olles saanud mingi võrrandi, oletatud, et võrrandi mõlemad pooled peavad võrduma nulliga.

Ülesanne 4

See ülesanne oli üldiselt küllaltki hästi lahendatud, kuigi esines ka mitmeid töid, kus ei olnud midagi mõistlikku osatud teha. Probleemiks oli siin ebapiisav põhjendus, miks rohkem lahendeid pole. Näiteks põhjenduse eest, et siinuse „täpsed“ väärtused on $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ja 1, neist ainult viimane annab „täpse“ 3 astendaja väärtuse, oli pandud täispunktid. Mõnel juhul jäi arusaamatuks, mille eest parandajad punkte maha olid võtnud.

Ülesanne 5

Selle ülesande põhiraskuseks tundus olevat väljendist „parajasti siis“ arusaamine — suures osas töödes oli tõestatud väide ainult ühtepidi. Ühtlustamist oli enamasti vaja siis, kui ühe osa tegemata jätmise eest kas ei oldud üldse punkte maha võetud või ei olnud võetud maha hindamisskeemi järgi. Leidusid ka mõned tööd, kus õpilane oli varjatult eelduseks võtnud nii selle, et raadiuste suhe on 3, kui kolmnurga võrdkülgsuse, ja selle abil siis ühte neist ka tõestada üritanud. Sellised tööd olid piirkondades üsna palju punkte saanud.

Ülesanne 6

See oli komplekti raskeim ja enamasti 0-7 tüüpi ülesanne, st kui tuli õige idee, siis tehti ülesanne ära, ja kui õiget ideed polnud, sai parimal juhul 1 punkti. Piirkondades oli tihti pandud 6 punkti näiteks paarsuse või 3-ga jaguvuse argumendi eest, mis antud juhul ei tööta, kuna ka värvitavate ruutude asukoht on oluline, ja mingil sammul ei pruugi enam olla võimalik kaht kõrvutiolevat ruutu värvida. Samuti oli pandud 6 punkti lahenduse eest, kus oli läbi tehtud 1×3 ja 2×2 juhud ning öeldud, et ülejäänud juhtudel saab ruudustiku „esimesele mängijale meelepärasel viisil“ sellisteks tükkideks jagada. Aga kui teine mängija teeb käigu, mis katab 2 erinevates osades asuvat ruutu, siis see argument ju ei tööta.

Otsustasime panna 1 punkti kõigile neile, kes olid ära teinud mõned väikesed, aga piisavalt erinevad mittetriviaalsed erijuhud, näiteks 1×3 ja 2×2, või siis nendega võrreldava võimalike lõppseisude analüüsi.