Lõppvoor 2023

Võistluskomplekti valmimisse panustasid:

Mart Abel
Kaarel Hänni
Maksim Ivanov
Urve Kangro
Oleg Košik
Aleksei Lissitsin
Härmel Nestra
Erik Paemurru
Karl Paul Parmakson
Janne Rytkönen
Rasmus Saame
Kaur Aare Saar
Sandra Schumann
Marko Tsengov
Triinu Veeorg
Birgit Veldi
Hendrik Vija

Eesti 70. matemaatikaolümpiaad

25. märts 2023 Lõppvoor **9. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Olgu a, b ja c sellised täisarvud, et $ab + bc + ca = 1$ ja $a + b = c$. Tõesta, et korrutis abc jagub 3-ga.

2. On antud niisugused arvud x, y, z, et $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x + y + z}$. Tõesta, et ka $\frac{1}{x^{2023}} + \frac{1}{y^{2023}} + \frac{1}{z^{2023}} = \frac{1}{x^{2023} + y^{2023} + z^{2023}}$.

3. Ringjoone c keskpunkt on O ja üks diameeter on AB. Olgu M lõigu AO keskpunkt ja CD ringjoone c mingi kõõl, mis läbib punkti M. Kõõlul CD valitakse punktist D erinev punkt H nii, et $|DM| = |MH|$. Leia nurga ABC suurus, kui on teada, et $BH \perp CD$.

4. Mänguriba laiusega 1 on jaotatud ühikruutudeks. Juku ja Miku asetavad kordamööda ühekaupa mänguriba ruutudele nuppe. Käia tohib igale ruudule, välja arvatud neile, millel või millega ühist külge omaval ruudul juba on nupp. Alustab Juku ning mängija, kes ei saa enam käiku teha, on kaotanud. Tõesta, et alati, kui mänguriba pikkuse k korral leidub Mikul võitev strateegia, leidub mänguriba pikkuste $k+1$, $k+2$ ja $k+3$ korral võitev strateegia Jukul.

5. Juku joonistab kaks võrdhaarset kolmnurka. Mõlema kolmnurga haarale tõmmatud kõrgus jaotab alusnurga kaheks osaks, mille suurused suhtuvad nagu $1 : x$, kus x on mingi üks ja sama positiivne arv (pole teada, kas täisarv). Kummalgi kolmnurgal saab valida ühe tipu nii, et valitud tippude juures olevad nurgad on võrdse suurusega. Kas võib kindlalt väita, et Juku joonistatud kolmnurgad on sarnased?

Eesti 70. matemaatikaolümpiaad

25. märts 2023 Lõppvoor **10. klass**

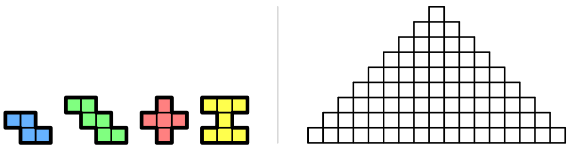
Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Arvuti kirjutab ekraanile arvud $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$, nii et iga arv alates kolmandast on kahe eelmise summa. Leia 202320232023. arvu viimane number.

2. Positiivne täisarv n esitatakse vähemalt kahe positiivse täisarvu summana nii, et liidetavate ruutude summa on mingi täisarvu ruut. Tõesta, et iga liidetava x korral $(n-x)^2 > 2x$.

3. Olgu O teravnurkse kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt. Lõigu AB pikendusel üle punkti B valitakse punkt D, lõigu AO pikendusel üle punkti O aga valitakse punkt E, mis asub kolmnurga ABC sees ja ühtlasi kolmnurga BCD ümberringjoone sees. Olgu F kolmnurkade ACE ja BCD ümberringjoonte lõikepunkt ($F \neq C$, $F \neq E$). Leia nurga DFE suurus.

4. a) Joonisel vasakul on kujutatud nelja sorti pusletükke. Kas sellistest tükkidest on võimalik kokku panna 9-astmeline „püramiid“, mis on joonisel paremal? Igat sorti tükke on piiramatul hulgal ning neid võib pöörata ja peegeldada (ümber pöörata), kuid mitte üksteisega katta.



b) Sama küsimus, kui „püramiid“ on 10-astmeline.

5. Juku ja Miku mängivad koordinaattasandil järgmist mängu. Kummalgi mängijal on oma nupp, mis algul asub koordinaatide alguspunktis. Oma käigul peab mängija liigutama oma nupu vabal valikul ühe ühiku võrra emmakumma koordinaattelje sihis emmas-kummas suunas. Algul teeb Juku k käiku, seejärel teevad Juku ja Miku selles järjekorras vaheldumisi kumbki n käiku. Võidab Miku, kui mängu lõpus on nuppude vaheline kaugus täisarv, vastasel juhul võidab Juku. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (n, k), mille korral Mikul on võimalik mäng võita Juku iga vastumängu korral.

Eesti 70. matemaatikaolümpiaad

25. märts 2023 Lõppvoor **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Mitu järjestikust nulli on arvu 2022! + 2023! lõpus kokku?

Märkus. Iga positiivse täisarvu n korral tähistab $n!$ korrutist $1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$.

2. Kas leiduvad sellised positiivsed reaalarvud a ja b, mis rahuldavad võrratuste süsteemi

$$\begin{cases} \sqrt{119}a + \sqrt{17}b \leqslant 2ab, \\ a^2 + b^2 \leqslant 2\sqrt{2023}? \end{cases}$$

3. Kolmnurga ABC tipu A juures oleva sisenurga ja välisnurga poolitajad lõikavad kolmnurga ABC ümberringjoont vastavalt punktides D ja E ($D \neq A$, $E \neq A$). Olgu F sirgete AD ja BC lõikepunkt ning D' punkti D peegeldus punktist F. Tõesta, et punktid B, D' ja E asuvad ühel sirgel parajasti siis, kui $\angle BAC = 2\angle ACB$.

4. Pakis on n kaarti ning igal kaardil on m erinevat sümbolit, kusjuures n ja m on mõlemad positiivsed. Igal kahel kaardil on ülimalt üks ühine sümbol. Tõesta, et kokku esineb kaartidel vähemalt $\dfrac{1+\sqrt{1+4nm(m-1)}}{2}$ erinevat sümbolit.

5. Kellaga on võimalik teha järgmisi operatsioone.

1) Keerata suurt osutit suvalise nurga võrra emmas-kummas suunas, mispuhul ühtlasi pöördub väike osuti 12 korda väiksema nurga võrra samas suunas.
2) Keerata korraga mõlemat osutit suvalise ühe ja sama nurga võrra ühes ja samas suunas.

Leia vähim selline nurk α, et kell on võimalik suvalisest algasendist õigeks keerata nii, et suur osuti pöördub mõlemat liiki operatsioonide käigus kokku ülimalt nurga α võrra (kummaski suunas tehtud pöörded lähevad arvesse plussmärgiga).

Märkus 1. Algasendis ei tarvitse osutid näidata ühtki korrektset kellaaega.

Märkus 2. Mitte arvestada aja edasikulgemisega kella keeramise jooksul.

Eesti 70. matemaatikaolümpiaad

25. märts 2023 Lõppvoor **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Olgu n positiivne täisarv ning k selline täisarv, et $0 < k < n$. Tõesta, et arv C_n^k jagub vähemalt ühe arvu n algteguriga.
Märkus. Kirjutis C_n^k tähistab kombinatsioonide arvu n elemendist k-kaupa.

2. Olgu $P(x)$ polünoom astmega 2023, kus kõik kordajad on nullid ja ühed, kusjuures $P(0) = 1$. Tõesta, et kõik polünoomi $P(x)$ reaalarvulised juured on väiksemad kui $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Märkus. Polünoom $P(x)$ on täpselt ühest tundmatust x sõltuv avaldis kujul $a_l x^l + a_{l-1}x^{l-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, kus $a_l \neq 0$ ja l on mingi naturaalarv. Arvu l nimetatakse selle polünoomi *astmeks*, arve $a_l, a_{l-1}, \ldots, a_1, a_0$ aga selle polünoomi *kordajateks*. Iga arvu c korral tähendab $P(c)$ avaldise $P(x)$ väärtust, kui võtta tundmatu x väärtuseks c. Polünoomi $P(x)$ *juureks* nimetatakse arvu c, mille korral $P(c) = 0$.

3. Kolmnurgas ABC on $\angle ACB = 90^\circ$. Olgu F tipust C tõmmatud kõrguse aluspunkt. Olgu kolmnurkade ABC, ACF ja BCF siseringjoonte keskpunktid vastavalt I, I_1 ja I_2 ning olgu M, M_1 ja M_2 vastavalt kolmnurkade ABC, ACF ja BCF siseringjoonte puutepunktid nende kolmnurkade hüpotenuusidega AB, CA ja CB. Tõesta, et M on kolmnurga II_1I_2 ümberringjoone keskpunkt ja ühtlasi sirgete M_1I_1 ja M_2I_2 lõikepunkt.

4. Matemaatikaolümpiaadi korralduseelarvest on puudu n eurot. Probleemi lahendamiseks otsustab komisjoni esimees varastada juveelipoest täpselt n euro väärtuses juveele. Juveelipoes on reas juveelid, millest esimese kahe väärtused on vastavalt 1 ja 2 eurot ning iga juveel alates kolmandast maksab täpselt niisama palju kui eelmised kaks kokku (ehk järgmiste juveelide väärtused on $3, 5, 8, 13, \ldots$ eurot). Juveelipoes on aga alarm, mis aktiveerub, kui võtta reast ära kaks kõrvutiasuvat juveeli. Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille puhul on komisjoni esimehel võimalik varastada täpselt n euro väärtuses juveele ilma alarmi aktiveerimata.

5. Nimetame permutatsiooni $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ arvudest $1, 2, \ldots, n$ *vahelduvaks*, kui iga $i = 1, \ldots, n-1$ korral $(-1)^i \sigma_i < (-1)^i \sigma_{i+1}$. Iga naturaalarvu n korral olgu α_n vahelduvate permutatsioonide osakaal kõigi permutatsioonide hulgas arvudest $1, 2, \ldots, n$. (Näiteks $\alpha_1 = \frac{1}{1}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_3 = \frac{2}{6}$ jne.) Tõesta, et leiduvad reaalarvud c_1, c_2 vahemikust $(0; 1)$ ning naturaalarv N, nii et iga naturaalarvu $n \geqslant N$ korral $(c_1)^n < \alpha_n < (c_2)^n$.

70-я Олимпиада Эстонии по математике

25 марта 2023 г. Заключительный тур **9 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Пусть a, b и c такие целые числа, что $ab+bc+ca=1$ и $a+b=c$. Доказать, что произведение abc делится на 3.

2. Даны такие числа x, y, z, что $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$. Доказать, что также и $\frac{1}{x^{2023}}+\frac{1}{y^{2023}}+\frac{1}{z^{2023}}=\frac{1}{x^{2023}+y^{2023}+z^{2023}}$.

3. Центром окружности c является точка O, а AB — один её диаметр. Пусть M — середина отрезка AO, а CD — какая-то хорда окружности c, проходящая через точку M. На хорде CD выбирают такую точку H, отличную от точки D, что $|DM|=|MH|$. Найти величину угла ABC, если известно, что $BH \perp CD$.

4. Игровая полоса шириной 1 разделена на единичные квадраты. Юра и Миша по очереди ставят по одной фишке на клетки полосы. Фишка может быть поставлена на любую клетку, кроме тех, на которых уже стоит фишка, а также напрямую примыкающих к ним. Юра ставит первую фишку, и игрок, который не может сделать свой ход, проигрывает. Доказать, что всякий раз, когда у Миши имеется выигрышная стратегия для полосы длиной k, у Юры имеется выигрышная стратегия для полос длиной $k+1$, $k+2$ и $k+3$.

5. Ваня рисует два равнобедренных треугольника. В обоих треугольниках высота, проведённая к ребру, делит угол при основании на две части, отношение которых равно $1:x$, где x — некоторое одно и то же положительное число (неизвестно, является ли x целым числом). В обоих треугольниках можно выбрать по одной вершине так, что углы при выбранных вершинах будут равны. Можно ли смело утверждать, что треугольники, которые нарисовал Ваня, подобны?

70-я Олимпиада Эстонии по математике

25 марта 2023 г. Заключительный тур **10 класс**

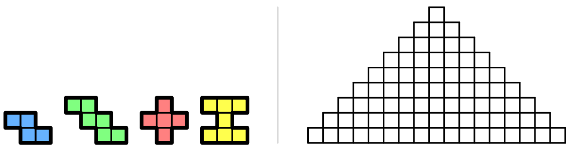
Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Компьютер записывает на экране числа $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ таким образом, что каждое число, начиная с третьего, является суммой двух предыдущих. Найти последнюю цифру 202320232023-го числа.

2. Положительное целое число n представлено в виде суммы по крайней мере двух положительных целых чисел так, что сумма квадратов слагаемых является квадратом некоторого целого числа. Доказать, что для каждого слагаемого x выполняется $(n-x)^2 > 2x$.

3. Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. На продолжении отрезка AB через точку B выбрана точка D, а на продолжении отрезка AO через точку O выбрана точка E, которая лежит внутри треугольника ABC, а также и внутри описанной окружности треугольника BCD. Пусть F — точка пересечения описанных окружностей треугольников ACE и BCD ($F \neq C$, $F \neq E$). Найти величину угла DFE.

4. а) На рисунке слева изображены четыре вида фигурок. Можно ли собрать из этих фигурок 9-ступенчатую „пирамиду“, которая изображена справа? Имеется неограниченное количество фигурок каждого вида, их можно поворачивать и зеркально отображать (переворачивать), но не накладывать друг на друга.



б) Тот же вопрос, если „пирамида“ 10-ступенчатая.

5. Юля и Маша играют в следующую игру на координатной плоскости. У каждого игрока есть своя фишка, которая изначально расположена в начале координат. В свой ход игрок должен переместить свою фишку на одну единицу в любом направлении параллельно любой координатной оси. Сначала Юля делает k ходов, затем Юля и Маша поочерёдно делают в таком порядке каждая n ходов. Маша выигрывает, если в конце игры расстояние между фишками будет целым числом, иначе выигрывает Юля. Найти все пары положительных целых чисел (n, k), для которых Маша может выиграть игру при любой игре Юли.

70-я Олимпиада Эстонии по математике

25 марта 2023 г. Заключительный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. На сколько последовательных нулей заканчивается число $2022! + 2023!$?

Примечание. Для каждого положительного целого числа n запись $n!$ обозначает произведение $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

2. Существуют ли положительные действительные числа a и b, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{119}a + \sqrt{17}b \leqslant 2ab, \\ a^2 + b^2 \leqslant 2\sqrt{2023}? \end{cases}$$

3. Биссектрисы внутреннего и внешних углов треугольника ABC при вершине A пересекают окружность, описанную вокруг треугольника ABC, соответственно в точках D и E ($D \neq A$, $E \neq A$). Пусть F — точка пересечения прямых AD и BC, а D' — отражение точки D относительно точки F. Доказать, что точки B, D' и E лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\angle BAC = 2\angle ACB$.

4. В пачке — n карт, и на каждой карте есть m различных символов, причём n и m — оба положительные. У каждых двух карт есть не более одного общего символа. Доказать, что всего на картах присутствует по меньшей мере $\dfrac{1 + \sqrt{1 + 4nm(m-1)}}{2}$ различных символов.

5. Над часами можно производить следующие операции.

1) Повернуть большую стрелку на любой угол в ту или другую сторону, в связи с чем повернётся и маленькая стрелка в ту же сторону на в 12 раз меньший угол.
2) Одновременно повернуть обе стрелки на один и тот же произвольный угол в одну и ту же сторону.

Найти наименьший такой угол α, при котором возможно перевести часы из любого начального положения на правильное время так, что большая стрелка при выполнении операций обоих видов повернётся в общей сложности не больше чем на угол α (повороты в обоих направлениях учитываются с положительным знаком).

Примечание 1. Начальное положение стрелок не обязано соответствовать какому-то корректному обозначению времени.

Примечание 2. Не нужно учитывать ход времени, потраченного на передвижение стрелок.

70-я Олимпиада Эстонии по математике

25 марта 2023 г. Заключительный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Даны целое положительное число n и такое целое число k, что $0 < k < n$. Доказать, что C_n^k делится хотя бы на один простой делитель числа n.
   Примечание. Запись C_n^k обозначает число сочетаний из n элементов по k.
2. Пусть $P(x)$ — многочлен степени 2023, в котором каждый коэффициент равен либо нулю, либо единице, причём $P(0) = 1$. Доказать, что действительные корни многочлена $P(x)$ меньше, чем $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
   Примечание. Многочлен $P(x)$ — это зависящее ровно от одной переменной x выражение вида $a_l x^l + a_{l-1}x^{l-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, где $a_l \neq 0$ и l — какое-то натуральное число. Число l называется *степенью* этого многочлена, а числа $a_l, a_{l-1}, \ldots, a_1, a_0$ — его *коэффициентами*. Для каждого числа c запись $P(c)$ обозначает значение выражения $P(x)$, если значением переменной x взять c. *Корнем* многочлена $P(x)$ называется число c, при котором $P(c) = 0$.
3. В треугольнике ABC выполняется $\angle ACB = 90^\circ$. Пусть F — основание высоты, проведённой из вершины C. Пусть I, I_1 и I_2 — центры окружностей, вписанных соответственно в треугольники ABC, ACF и BCF, а M, M_1 и M_2 — точки касания этих окружностей соответственно с гипотенузами AB, CA и CB. Доказать, что M — и центр описанной окружности треугольника II_1I_2, и точка пересечения прямых M_1I_1 и M_2I_2.
4. В бюджете математической олимпиады не хватает n евро. Поэтому председатель комиссии решает украсть из ювелирного магазина бриллиантов на сумму ровно n евро. В магазине бриллианты лежат в ряд и ценности первых двух в ряду — соответственно 1 и 2 евро, а каждый бриллиант, начиная с третьего, стоит ровно столько, сколько предыдущие два вместе (то есть ценности следующих бриллиантов — $3, 5, 8, 13, \ldots$ евро). Однако в магазине есть сигнализация, которая активируется, если взять из ряда два лежащих подряд бриллианта. Найти все целые положительные числа n, при которых председатель комиссии сможет украсть бриллиантов на сумму ровно n евро без активации сигнализации.
5. Назовём перестановку $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$ *переменчивой*, если $(-1)^i\sigma_i < (-1)^i\sigma_{i+1}$ для каждого $i = 1, \ldots, n-1$. Для каждого натурального n пусть α_n — доля переменчивых перестановок во множестве всех перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$. (Например, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1/2$, $\alpha_3 = 2/6$ и т. д.) Доказать, что существуют действительные числа c_1, c_2 из промежутка $(0; 1)$ и натуральное число N такие, что $(c_1)^n < \alpha_n < (c_2)^n$ для каждого натурального $n \geqslant N$.

Estonian Mathematical Olympiad No. 70

March 25, 2023 Final round **Grade 9**

Working time: 5 hours.
A correct and sufficiently explained solution to each problem is worth 7 points.
Written materials or electronic devices are not permitted.

1. Let a, b, c be integers satisfying the conditions $ab+bc+ca = 1$ and $a+b = c$. Prove that the product abc is divisible by 3.

2. Given any numbers x, y, z such that $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}$, prove that $\frac{1}{x^{2023}} + \frac{1}{y^{2023}} + \frac{1}{z^{2023}} = \frac{1}{x^{2023} + y^{2023} + z^{2023}}$.

3. Let c be a circle, O its centre and AB its diameter. Let M be the midpoint of the segment AO and CD be a chord of the circle c passing through the point M. Let $H \neq D$ be a point on the chord CD, such that $DM = MH$. Find the angle ABC, given that $BH \perp CD$.

4. A strip of width 1 is divided into unit squares. Juku and Miku take turns placing pieces one by one on the squares of the strip. A piece can be placed on any square except those already containing a piece and those adjacent to such squares. Juku places the first piece and the player who cannot place a piece loses. Prove that whenever Miku has a winning strategy for a strip of length k, Juku has a winning strategy for strips of lengths $k + 1$, $k + 2$ and $k + 3$.

5. Juku draws two isosceles triangles. In both triangles, the altitude drawn onto a leg divides the angle at the base into two parts, which have a ratio of $1 : x$, where x is the same positive number for both triangles (it is not known if x is an integer). In both triangles, a vertex can be chosen such that the angles at the chosen vertices are equal. Can we be certain that the two triangles Juku drew are similar?

Viron 70. kansallinen matematiikkakilpailu

25. maaliskuuta 2023 Loppukilpailu **9. luokka**

Suoritusaika: 5 tuntia.
Jokaisesta oikeasta ja hyvin perustellusta tehtävän ratkaisusta saa 7 pistettä.
Kirjallisen materiaalin tai elektronisten laitteiden käyttö on kiellettyä.

1. Olkoot a, b, c kokonaislukuja, jotka toteuttavat ehdot $ab + bc + ca = 1$ ja $a + b = c$. Todista, että abc on jaollinen luvulla 3.

2. Olkoot x, y, z sellaisia lukuja, että $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}$. Todista, että $\frac{1}{x^{2023}} + \frac{1}{y^{2023}} + \frac{1}{z^{2023}} = \frac{1}{x^{2023} + y^{2023} + z^{2023}}$.

3. Olkoon c ympyrä, O sen keskipiste ja AB sen halkaisija. Olkoon M janan AO keskipiste ja CD ympyrän c jänne, joka kulkee pisteen M kautta. Olkoon $H \neq D$ piste jänteellä CD siten, että $|DM| = |MH|$. Selvitä kulman ABC suuruus, kun $BH \perp CD$.

4. Nauha, jonka leveys on 1, jaetaan yksikköruuduiksi. Juku ja Miku asettavat pelinappuloita yksitellen vuorotellen nauhan yksikköruuduille. Pelinappulan voi asettaa mille tahansa ruudulle, paitsi niille ruuduille, joilla on jo pelinappula, ja niille ruuduille, jotka ovat tällaisen ruudun vieressä. Juku asettaa ensimmäisen pelinappulan, ja se pelaaja, joka ei voi asettaa pelinappulaa vuorollaan, häviää. Todista, että kun Mikulla on voittostrategia nauhalle, jonka pituus on k, Jukulla on voittostrategia nauhoille, joiden pituudet ovat $k + 1$, $k + 2$ ja $k + 3$.

5. Juku piirtää tasakylkisiä kolmioita. Kummassakin kolmiossa sivulle piirretty korkeusjana jakaa kannalla olevan kulman kahteen osaan suhteessa $1 : x$, jossa x on sama positiivinen luku kummallekin kolmiolle (ei ole tiedossa, onko x kokonaisluku). Molemmissa kolmioissa kärki voidaan valita niin, että kulmat valituissa kärjissä ovat yhtä suuret. Voidaanko olla varmoja, että Jukun piirtämät kolmiot ovat yhdenmuotoiset?

Lahendused

1. *(Maksim Ivanov)*

Olgu a, b ja c sellised täisarvud, et $ab + bc + ca = 1$ ja $a + b = c$. Tõesta, et korrutis abc jagub 3-ga.

Lahendus 1. Kuna $ab = 1 - bc - ca = 1 - c(a + b) = 1 - c^2 = (1 - c)(1 + c)$, siis $abc = (1 - c)(1 + c)c = -(c - 1)c(c + 1)$. Kolme järjestikuse täisarvu $c - 1, c, c + 1$ korrutis jagub 3-ga, sest tegurite seas peab leiduma 3-ga jaguv arv. Seega jagub 3-ga ka arv abc.

Lahendus 2. Oletame väitevastaselt, et abc ei jagu 3-ga. Siis ükski arvudest a, b, c ei jagu 3-ga. Sellest tulenevalt peavad a ja b andma 3-ga jagamisel sama jäägi, kuna erinevad jäägid saaksid olla vaid 1 ja 2 ning $a + b$ jääk tuleks 0, mis pole võimalik, sest $a + b = c$. Seega jääb vaid kaks varianti. Kui $a \equiv b \equiv 1 \pmod 3$ ja $c \equiv 2 \pmod 3$, siis $ab + bc + ca \equiv 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \equiv 2 \pmod 3$, kui aga $a \equiv b \equiv 2 \pmod 3$ ja $c \equiv 1 \pmod 3$, siis saame sarnaselt $ab + bc + ca \equiv 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \equiv 2 \pmod 3$. Järelikult $ab + bc + ca \equiv 2 \pmod 3$, mis on vastuolus eeldusega $ab + bc + ca = 1$. Vastuolu näitab, et abc peab jaguma 3-ga.

Märkus. Kirjutisega $x \equiv y \pmod m$ märgitakse, et vahe $x - y$ jagub arvuga m.

Lahendus 3. Paneme tähele, et

$$ab + bc + ca = ab + b(a + b) + (a + b)a = a^2 + b^2 + 3ab.$$

Kuna $ab + bc + ca = 1$ ja $3ab$ jagub 3-ga, siis $a^2 + b^2$ annab 3-ga jagades jäägi 1. Samal ajal a^2 ja b^2 saavad anda 3-ga jagades ainult jääke 0 ja 1, sest $(3k)^2 = 3 \cdot 3k^2$ ja $(3k \pm 1)^2 = (3k)^2 \pm 2 \cdot 3k + 1 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$. Et a^2 ja b^2 annaks summaks arvu, mis annab 3-ga jagades jäägi 1, peab üks arvudest a^2 ja b^2 andma 3-ga jagades jäägi 0. Siis aga vastavalt a või b jagub 3-ga. Järelikult korrutis abc jagub 3-ga.

2. *(Urve Kangro)*

On antud niisugused arvud x, y, z, et $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x + y + z}$. Tõesta, et ka $\frac{1}{x^{2023}} + \frac{1}{y^{2023}} + \frac{1}{z^{2023}} = \frac{1}{x^{2023} + y^{2023} + z^{2023}}$.

Lahendus. Viies seoses $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}$ kõik murrud ühele poole ja ühisele nimetajale ning tegurdades lugeja, saame $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz(x+y+z)} = 0$. Sarnaselt on tingimus $\frac{1}{x^{2023}} + \frac{1}{y^{2023}} + \frac{1}{z^{2023}} = \frac{1}{x^{2023}+y^{2023}+z^{2023}}$ esitatav kujul $\frac{\left(x^{2023}+y^{2023}\right)\left(y^{2023}+z^{2023}\right)\left(z^{2023}+x^{2023}\right)}{x^{2023}y^{2023}z^{2023}\left(x^{2023}+y^{2023}+z^{2023}\right)} = 0$. Seega esimene tingimus kehtib parajasti siis, kui vähemalt üks summadest $x+y$, $y+z$ ja $z+x$ on null. Kui aga näiteks $x+y=0$ ehk $y=-x$, siis ka $y^{2023} = -x^{2023}$ ehk $x^{2023}+y^{2023}=0$, mistõttu kehtib ka teine tingimus. Sarnaselt jõuame sihile, kui kas $y+z=0$ või $z+x=0$.

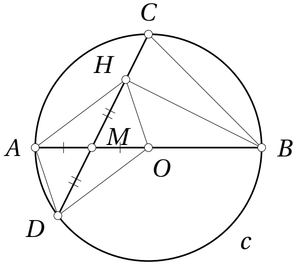
3. *(Maksim Ivanov)*

Ringjoone c keskpunkt on O ja üks diameeter on AB. Olgu M lõigu AO keskpunkt ja CD ringjoone c mingi kõõl, mis läbib punkti M. Kõõlul CD valitakse punktist D erinev punkt H nii, et $|DM| = |MH|$. Leia nurga ABC suurus, kui on teada, et $BH \perp CD$.

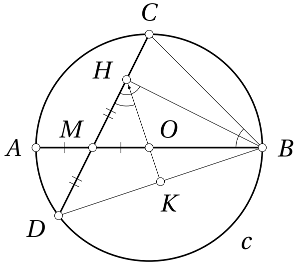
Vastus: 45°.

Lahendus. Piirdenurga omaduse põhjal $\angle ABC = \angle ADC = \angle ADH$ (joonis 1). Et nelinurga $ADOH$ diagonaalid poolitavad teineteist, on nelinurk $ADOH$ rööpkülik, millest tulenevalt on tema vastasküljed paralleelsed. Järelikult $\angle ADH = \angle OHD$. Kokkuvõttes $\angle ABC = \angle OHD$.

Olgu K sirgete HO ja BD lõikepunkt (joonis 2). Et punkt M poolitab lõigu DH, on BM kolmnurga BDH mediaan. Kuna $|OM| = \frac{1}{2}|OA| = \frac{1}{2}|OB|$, siis O on kolmnurga BDH mediaanide lõikepunkt. Seega ka HK on kolmnurga BDH mediaan ja K lõigu BD keskpunkt, mistõttu kolmnurgad BKO ja DKO on võrdsed tunnuse KKK põhjal. Järelikult $\angle KOB = \angle KOD$. Seega ka $\angle HOB = \angle HOD$, millest tulenevalt on kolmnurgad HOB ja HOD võrdsed tunnuse KNK põhjal. Järelikult $\angle OHB = \angle OHD = \frac{1}{2}\angle BHD = 45^\circ$. Seega ka $\angle ABC = 45^\circ$.



Joonis 1

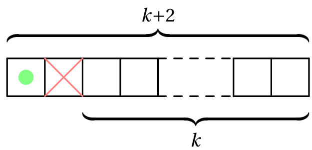


Joonis 2

4. *(Härmel Nestra)*

Mänguriba laiusega 1 on jaotatud ühikruutudeks. Juku ja Miku asetavad kordamööda ühekaupa mänguriba ruutudele nuppe. Käia tohib igale ruudule, välja arvatud neile, millel või millega ühist külge omaval ruudul juba on nupp. Alustab Juku ning mängija, kes ei saa enam käiku teha, on kaotanud. Tõesta, et alati, kui mänguriba pikkuse k korral leidub Mikul võitev strateegia, leidub mänguriba pikkuste $k+1$, $k+2$ ja $k+3$ korral võitev strateegia Jukul.

Lahendus. Kui mänguriba pikkus on paaritu, siis saab Juku võita, asetades avakäigul nupu keskmisele ruudule ja peegeldades järgnevalt Miku käike mänguriba keskkoha suhtes. On selge, et niimoodi ei jää Juku esimesena käigupuudusse. Kuna eelduse kohaselt leidub mänguriba pikkuse k korral Mikul võitev strateegia, siis k on paaris. Järelikult $k+1$ ja $k+3$ on paaritud, mistõttu eelneva põhjal leidub mänguriba pikkuste $k+1$ ja $k+3$ korral võitev strateegia Jukul. Mänguribal pikkusega $k+2$ saab aga Juku võita, asetades avakäigul nupu äärmisele ruudule ja kasutades järgnevalt Miku vastu strateegiat, millega alustaja vastane võidab mänguriba pikkuse k korral, sest pärast seda avakäiku on kaks äärmist ruutu mängust väljas ja mäng jätkub nagu mänguribal pikkusega k (joonis 3).



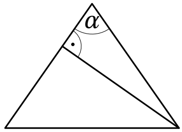
Joonis 3

5. *(Härmel Nestra)*

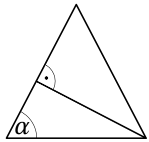
Juku joonistab kaks võrdhaarset kolmnurka. Mõlema kolmnurga haarale tõmmatud kõrgus jaotab alusnurga kaheks osaks, mille suurused suhtuvad nagu $1 : x$, kus x on mingi üks ja sama positiivne arv (pole teada, kas täisarv). Kummalgi kolmnurgal saab valida ühe tipu nii, et valitud tippude juures olevad nurgad on võrdse suurusega. Kas võib kindlalt väita, et Juku joonistatud kolmnurgad on sarnased?

Vastus: jah.

Lahendus. Võrdhaarsed kolmnurgad, mille tipunurgad on võrdse suurusega, on sarnased, sest tipunurga suurus määrab üheselt alusnurkade suuruse. Samuti on võrdhaarsed kolmnurgad sarnased, kui nende alusnurgad on võrdse suurusega. Seetõttu võime järgnevas keskenduda juhule, kus ühe kolmnurga tipunurk ja teise kolmnurga alusnurk on võrdse suurusega. Olgu see ühine suurus α.



Joonis 4



Joonis 5

Kolmnurgas, mille tipunurk on suurusega α (joonis 4), jaotab haarale tõmmatud kõrgus alusnurga osadeks suurustega $90^\circ - \alpha$ ja $90^\circ - \dfrac{180^\circ - \alpha}{2}$ ehk $\dfrac{\alpha}{2}$. Et need suhtuvad mingis järjestuses võetuna nagu $1 : x$, siis $90^\circ - \alpha = x \cdot \dfrac{\alpha}{2}$ või $\dfrac{\alpha}{2} = x \cdot (90^\circ - \alpha)$. Kolmnurgas, mille alusnurk on suurusega α (joonis 5), jaotab haarale tõmmatud kõrgus alusnurga osadeks suurustega $90^\circ - \alpha$ ja $90^\circ - (180^\circ - 2\alpha)$ ehk $2\alpha - 90^\circ$. Et needki suhtuvad mingis järjestuses võetuna nagu $1 : x$, siis $90^\circ - \alpha = x \cdot (2\alpha - 90^\circ)$ või $2\alpha - 90^\circ = x \cdot (90^\circ - \alpha)$.

Jääb läbi vaadata saadud võimaluste neli kombinatsiooni.

- Kui $90^\circ - \alpha = x \cdot \dfrac{\alpha}{2}$ ja $90^\circ - \alpha = x \cdot (2\alpha - 90^\circ)$, siis $\dfrac{\alpha}{2} = 2\alpha - 90^\circ$, kust $\alpha = 60^\circ$.
- Kui $90^\circ - \alpha = x \cdot \dfrac{\alpha}{2}$ ja $2\alpha - 90^\circ = x \cdot (90^\circ - \alpha)$, siis vastavalt $\alpha = \dfrac{2 \cdot 90^\circ}{2 + x}$ ja $\alpha = \dfrac{(1 + x) \cdot 90^\circ}{2 + x}$. Seega $2 = 1 + x$, kust $x = 1$. Asendades eelnenud seostesse, saame $\alpha = 60^\circ$.
- Kui $\dfrac{\alpha}{2} = x \cdot (90^\circ - \alpha)$ ja $90^\circ - \alpha = x \cdot (2\alpha - 90^\circ)$, siis vastavalt $\alpha = \dfrac{2x \cdot 90^\circ}{1 + 2x}$ ja $\alpha = \dfrac{(1 + x) \cdot 90^\circ}{1 + 2x}$. Seega $2x = 1 + x$, kust $x = 1$. Asendades eelnenud seostesse, saame $\alpha = 60^\circ$.
- Kui $\dfrac{\alpha}{2} = x \cdot (90^\circ - \alpha)$ ja $2\alpha - 90^\circ = x \cdot (90^\circ - \alpha)$, siis $\dfrac{\alpha}{2} = 2\alpha - 90^\circ$, kust $\alpha = 60^\circ$.

Seega kõigil juhtudel $\alpha = 60^\circ$. Kui aga võrdhaarse kolmnurga üks nurkadest on suurusega 60°, siis on kolmnurk võrdkülgne. Järelikult Juku joonistab kaks võrdkülgset kolmnurka, mistõttu Juku joonistatud kolmnurgad on tõepoolest sarnased.

Lahendused

1. *(Birgit Veldi)*

Arvuti kirjutab ekraanile arvud $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$, nii et iga arv alates kolmandast on kahe eelmise summa. Leia 202320232023. arvu viimane number.

Vastus: 2.

Lahendus 1. Ekraanile ilmuvate arvude jäägid jagamisel 2-ga on

$$1, 1, 0, 1, 1, 0, \ldots.$$

Seega iga positiivse täisarvu n korral annavad arvud järjekorranumbritega n ja $n+3$ jagamisel 2-ga sama jäägi. Ekraanile ilmuvate arvude jäägid jagamisel 5-ga on

$$1, 1, 2, 3, 0, 3, 3, 1, 4, 0, 4, 4, 3, 2, 0, 2, 2, 4, 1, 0, 1, 1, \ldots.$$

Näeme, et esimene ja teine arv annavad jagamisel 5-ga samad jäägid nagu arvud vastavalt järjekorranumbriga 21 ja 22. Seega tekib jääkides tsükkel pikkusega 20 ehk iga positiivse täisarvu n korral annavad arvud järjekorranumbritega n ja $n + 20$ jagamisel 5-ga sama jäägi. Kokkuvõttes saame, et iga positiivse täisarvu n korral annavad arvud järjekorranumbritega n ja $n + 60$ samad jäägid nii 2-ga kui ka 5-ga jagamisel, mis aga tähendab, et need arvud lõpevad ühe ja sama numbriga. Kuna arv 20232023202 jagub nii 2-ga kui ka 3-ga, siis arv 20232023202 jagub 6-ga, millest tulenevalt arv 202320232020 jagub 60-ga. Seega arv järjekorranumbriga 202320232023 lõpeb sama numbriga nagu kolmas arv ehk numbriga 2.

Lahendus 2. Ekraanile ilmuvate arvude viimased numbrid on

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4, 3, 7, 0, 7, 7, \ldots.$$

Näeme, et arvud järjekorranumbriga 16 ja 17 lõpevad 7-ga, samas kui esimesed kaks arvu lõpevad 1-ga. Teisi sõnu, $F_{16} \equiv 7 \cdot F_1 \pmod{10}$ ja $F_{17} \equiv 7 \cdot F_2 \pmod{10}$, kus F_n tähistab ekraanile ilmuvat arvu järjekorranumbriga n. Alati, kui mingi k korral $F_{k+15} \equiv 7 \cdot F_k \pmod{10}$ ja $F_{k+1+15} \equiv 7 \cdot F_{k+1} \pmod{10}$, saame

$$\begin{aligned} F_{k+2+15} &= F_{k+15} + F_{k+1+15} \equiv \\ &\equiv 7 \cdot F_k + 7 \cdot F_{k+1} = \\ &= 7 \cdot (F_k + F_{k+1}) = 7 \cdot F_{k+2} \pmod{10}. \end{aligned}$$

Seega matemaatilise induktsiooni printsiibi põhjal $F_{n+15} \equiv 7 \cdot F_n \pmod{10}$ iga järjekorranumbri n korral. Siit

$$F_{n+60} \equiv 7 \cdot F_{n+45} \equiv 7^2 \cdot F_{n+30} \equiv 7^3 \cdot F_{n+15} \equiv 7^4 \cdot F_n \equiv F_n \pmod{10}.$$

Jätkame nagu eelmises lahenduses.

Märkus. Kirjutisega $a \equiv b \pmod{m}$ tähistatakse väidet, et vahe $a - b$ jagub arvuga m.

2. *(Härmel Nestra)*

Positiivne täisarv n esitatakse vähemalt kahe positiivse täisarvu summana nii, et liidetavate ruutude summa on mingi täisarvu ruut. Tõesta, et iga liidetava x korral $(n-x)^2 > 2x$.

Lahendus. Olgu liidetavate arv k. Olgu x suvaline liidetav ning $z_2, \ldots, z_k$ ülejäänud liidetavad. Ülesande tingimuste põhjal $x + z_2 + \ldots + z_k = n$ ja $x^2 + z_2^2 + \ldots + z_k^2$ on mingi täisarvu ruut. Viimasest tingimusest järeldub, et $x^2 + z_2^2 + \ldots + z_k^2 \geqslant (x+1)^2$, sest liidetavaid on vähemalt kaks ja nad on positiivsed. Seega

$$z_2^2 + \ldots + z_k^2 \geqslant (x+1)^2 - x^2 = 2x + 1.$$

Paneme tähele, et $(n-x)^2 = (z_2 + \ldots + z_k)^2 \geqslant z_2^2 + \ldots + z_k^2$, sest sulgude avamisel avaldises $(z_2 + \ldots + z_k)^2$ tekivad liidetavatena kõik ruudud $z_2^2, \ldots, z_k^2$ ja juhul $r > 2$ veel positiivsete arvude korrutisi. Kokkuvõttes $(n-x)^2 \geqslant 2x + 1$, kust saamegi $(n-x)^2 > 2x$.

3. *(Hendrik Vija)*

Olgu O teravnurkse kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt. Lõigu AB pikendusel üle punkti B valitakse punkt D, lõigu AO pikendusel üle punkti O aga valitakse punkt E, mis asub kolmnurga ABC sees ja ühtlasi kolmnurga BCD ümberringjoone sees. Olgu F kolmnurkade ACE ja BCD ümberringjoonte lõikepunkt ($F \neq C$, $F \neq E$). Leia nurga DFE suurus.

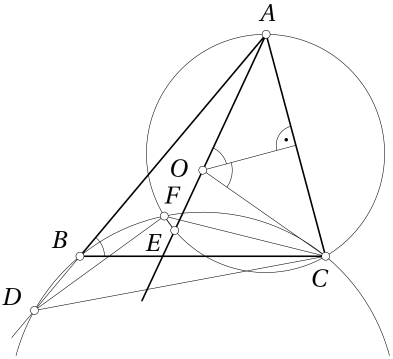
Vastus: 90°.

Lahendus 1. Tähistame $\angle ABC = \beta$. Piirdenurga ja kesknurga vahelisest seosest kolmnurga ABC ümberringjoones saame $\angle COA = 2\beta$, mistõttu võrdhaarsest kolmnurgast ACO saame

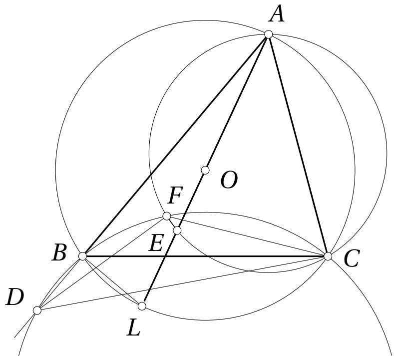
$$\angle CAO = \angle ACO = \frac{1}{2}\left(180^\circ - 2\beta\right) = 90^\circ - \beta.$$

Kasutades võrdsetele kaartele toetuvaid piirdenurki kolmnurkade BCD ja ACE ümberringjoontes (joonis 6), saame nüüd

$$\begin{aligned} \angle DFE &= \angle DFC - \angle EFC = \\ &= \angle DBC - \angle EAC = \left(180^\circ - \beta\right) - \left(90^\circ - \beta\right) = 90^\circ. \end{aligned}$$



Joonis 6



Joonis 7

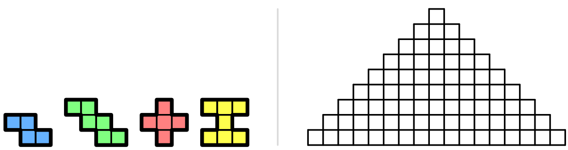
Lahendus 2. Olgu L sirge AO teine lõikepunkt kolmnurga ABC ümberringjoonega (joonis 7). Kasutades võrdsetele kaartele toetuvaid piirdenurki kolmnurkade BCD ja ABC ümberringjoontes, saame

$$
\begin{aligned}
\angle DFE &= \angle DFC - \angle EFC = \\
&= \angle DBC - \angle EAC = \\
&= \angle DBC - \angle LAC = \angle DBC - \angle LBC = \angle DBL = 180^\circ - \angle ABL.
\end{aligned}
$$

Kuid Thalese teoreemi põhjal $\angle ABL = 90^\circ$. Järelikult ka $\angle DFE = 90^\circ$.

4. *(Birgit Veldi)*

a) Joonisel vasakul on kujutatud nelja sorti pusletükke. Kas sellistest tükkidest on võimalik kokku panna 9-astmeline „püramiid“, mis on joonisel paremal? Igat sorti tükke on piiramatul hulgal ning neid võib pöörata ja peegeldada (ümber pöörata), kuid mitte üksteisega katta.



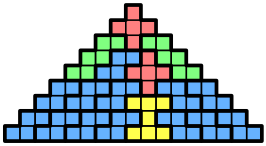
b) Sama küsimus, kui „püramiid“ on 10-astmeline.

Vastus: a) jah; b) ei.

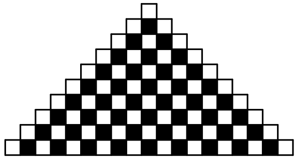
Lahendus.

a) Üks võimalik paigutus on toodud joonisel 8.

b) Värvime 10-astmelise püramiidi ja pusletükid malekorras nagu näidatud joonisel 9. Märkame, et püramiidis on valgeid ruute 10 võrra rohkem kui musti. Seega ei jagu valgete ja mustade ruutude arvude vahe



Joonis 8



Joonis 9

3-ga. Samas katavad esimene ja teine pusletükk suvalise paigutuse korral musti ja valgeid ruute võrdselt, kolmas ja neljas pusletükk aga ühte värvi ruute täpselt 3 võrra rohkem kui teist värvi ruute. Seega jagub iga antud pusletükkide poolt kaetava ala valgete ja mustade ruutude arvude vahe 3-ga. Järelikult pole neid pusletükke kombineerides võimalik kokku panna 10-astmelist püramiidi.

5. *(Marko Tsengov)*

Juku ja Miku mängivad koordinaattasandil järgmist mängu. Kummalgi mängijal on oma nupp, mis algul asub koordinaatide alguspunktis. Oma käigul peab mängija liigutama oma nupu vabal valikul ühe ühiku võrra emma-kumma koordinaattelje sihis emmas-kummas suunas. Algul teeb Juku k käiku, seejärel teevad Juku ja Miku selles järjekorras vaheldumisi kumbki n käiku. Võidab Miku, kui mängu lõpus on nuppude vaheline kaugus täisarv, vastasel juhul võidab Juku. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (n, k), mille korral Mikul on võimalik mäng võita Juku iga vastumängu korral.

Vastus: paarid $(n, 1)$ ja $(n, 2)$ iga positiivse täisarvu n korral.

Lahendus. Kui $k = 1$, siis pärast Juku esimest käiku asub Juku nupp Miku nupust 1 ühiku kaugusel. Seega on nuppude vaheline kaugus täisarv ning Miku saab järgnevalt olukorda sellisena hoida, liigutades igal käigul oma nuppu Juku nupuga samas suunas. Järelikult Mikul on võimalik võita.

Kui $k = 2$, siis pärast Juku 3 esimest käiku on Juku nupu x-koordinaadi või y-koordinaadi absoluutväärtus ülimalt 1. Miku saab seejärel käia nii, et tema nupu ja Juku nupu vastav koordinaat oleks sama. Siis on nuppude vaheline kaugus täisarv ning sarnaselt eelmise juhuga saab Miku võita.

Kui $k \geqslant 3$ ja k on paaritu arv, siis saab Juku liigutada oma nupu esimese $k+1$ käiguga punkti $(2; 2)$ (peale esimest 4 käiku vajadusel korrates edasi-tagasi käike). Seejärel saab Juku korrata igal oma käigul Miku viimast käiku, nii et Juku nupu asukoht on Miku nupu asukohast endiselt saadav vektori $(2; 2)$ rakendamisel. Oma viimasel käigul muudab Miku selle vektori üht komponenti 1 võrra. Seega mängu lõpus on nuppudevaheline kaugus $\sqrt{1^2 + 2^2}$ või $\sqrt{3^2 + 2^2}$ ehk vastavalt $\sqrt{5}$ või $\sqrt{13}$. Et kumbki neist pole täisarv, võidab Juku.

Kui $k \geqslant 3$ ja k on paarisarv, siis saab Juku liigutada oma nupu esimese $k+1$ käiguga punkti $(3; 2)$ (peale esimest 5 käiku vajadusel korrates edasi-tagasi käike). Seejärel saab Juku korrata igal oma käigul Miku viimast käiku, nii et Juku nupu asukoht on Miku nupu asukohast endiselt saadav vektori $(3; 2)$ rakendamisel. Oma viimasel käigul muudab Miku selle vektori üht komponenti 1 võrra. Seega mängu lõpus on nuppudevaheline kaugus $\sqrt{2^2+2^2}$ või $\sqrt{4^2+2^2}$ või $\sqrt{3^2+1^2}$ või $\sqrt{3^2+3^2}$ ehk vastavalt $\sqrt{8}$ või $\sqrt{20}$ või $\sqrt{10}$ või $\sqrt{18}$. Taas pole ükski võimalustest täisarv, mistõttu võidab Juku.

Eesti 70. matemaatikaolümpiaad

25. märts 2023 Lõppvoor **11. klass**

Lahendused

1. *(Erik Paemurru, Härmel Nestra)*

Mitu järjestikust nulli on arvu 2022! + 2023! lõpus kokku?

Märkus. Iga positiivse täisarvu n korral tähistab $n!$ korrutist $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

Vastus: 503.

Lahendus. Korrutises $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ jagub iga teine tegur arvuga 2, iga neljas tegur arvuga 2^2, iga kaheksas tegur arvuga 2^3 jne. Seega algarvu 2 astendaja arvu $n!$ kanoonilises esituses on $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^3} \right\rfloor + \ldots$, kus $\lfloor x \rfloor$ tähistab arvu x täisosa (suurimat täisarvu, mis pole suurem kui x). Sarnaselt näeme, et algarvu 5 astendaja arvu $n!$ kanoonilises esituses on $\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^3} \right\rfloor + \ldots$. Algarvu 2 astendajas on liidetavad vähemalt niisama suured kui vastavad liidetavad algarvu 5 astendajas, mistõttu algarvu 2 astendaja on vähemalt niisama suur kui kui algarvu 5 astendaja. Muuhulgas järeldub sellest, et arvu 2022! kanoonilises esituses on algarvu 5 astendaja $\left\lfloor \frac{2022}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2022}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2022}{125} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2022}{625} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2022}{3125} \right\rfloor + \ldots$ ehk $404 + 80 + 16 + 3 + 0 + \ldots$ ehk 503 ning algarvu 2 astendaja vähemalt 503.

Paneme nüüd tähele, et

$$2022! + 2023! = 2022! \cdot (1 + 2023) = 2022! \cdot 2024.$$

Seega ka arvu $2022! + 2023!$ kanoonilises esituses on algarvu 5 astendaja 503, algarvu 2 astendaja aga suurem. Seega jagub arv $2022! + 2023!$ arvuga 10^{503}, kuid mitte arvuga 10^{504}. Järelikult on arvu $2022! + 2023!$ lõpus täpselt 503 järjestikust nulli.

Märkus. Mistahes algarvu p astendaja arvu $n!$ kanoonilises esituses avaldub kujul $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots$. Seda nimetatakse *Legendre'i valemiks.*

2. *(Triinu Veeorg, Härmel Nestra)*

Kas leiduvad sellised positiivsed reaalarvud a ja b, mis rahuldavad võrratuste süsteemi

$$\begin{cases} \sqrt{119}a + \sqrt{17}b \leqslant 2ab, \\ a^2 + b^2 \leqslant 2\sqrt{2023}? \end{cases}$$

Vastus: ei.

Lahendus. Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest arvude $\sqrt{119}a$ ja $\sqrt{17}b$ jaoks saame

$$\sqrt{119}a + \sqrt{17}b \geqslant 2\sqrt{\sqrt{119}a \cdot \sqrt{17}b} = 2\sqrt{\sqrt{2023}ab}.$$

Et süsteemi esimese võrratuse põhjal $2ab \geqslant \sqrt{119}a + \sqrt{17}b$, siis kokkuvõttes $2ab \geqslant 2\sqrt{\sqrt{2023}ab}$, kust poolte läbijagamisel arvuga $2\sqrt{ab}$ saame $\sqrt{ab} \geqslant \sqrt{\sqrt{2023}}$, mis poolte ruututõstmisel annab $ab \geqslant \sqrt{2023}$. Et süsteemi teise võrratuse põhjal $2\sqrt{2023} \geqslant a^2 + b^2$, aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelise võrratuse põhjal aga $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, siis kokkuvõttes saame kinnise võrratuste ahela

$$2ab \geqslant 2\sqrt{2023} \geqslant a^2 + b^2 \geqslant 2ab.$$

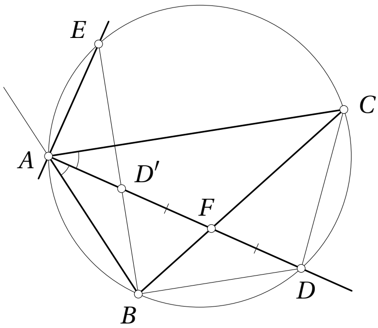
Seega $a^2 + b^2 = 2ab = 2\sqrt{2023}$. Esimene võrdus annab $a = b$, mis teist võrdust arvestades annab $a^2 = \sqrt{2023}$. Tõstes aga süsteemi esimese võrratuse ruutu ja asendades sinna $a = b$, saame $\left(119 + 17 + 2\sqrt{2023}\right) a^2 \leqslant 4a^4$ ehk $136 + 2\sqrt{2023} \leqslant 4a^2$. Kuna $a^2 = \sqrt{2023}$, siis peaks kehtima $136 \leqslant 2\sqrt{2023}$ ehk $136^2 \leqslant 4 \cdot 2023$, mis aga ei pea paika, sest $4 \cdot 2023 < 10000 < 136^2$. Järelikult ei leidu selliseid positiivseid reaalarve a ja b, mis vastaksid ülesande tingimustele.

3. *(Sandra Schumann)*

Kolmnurga ABC tipu A juures oleva sisenurga ja välisnurga poolitajad lõikavad kolmnurga ABC ümberringjoont vastavalt punktides D ja E ($D \neq A$, $E \neq A$). Olgu F sirgete AD ja BC lõikepunkt ning D' punkti D peegeldus punktist F. Tõesta, et punktid B, D' ja E asuvad ühel sirgel parajasti siis, kui $\angle BAC = 2\angle ACB$.

Lahendus. Tähistame $\alpha = \angle BAD = \angle DAC$ (joonisel 10 märgitud kaarekesega). Samale ringjoone kaarele toetuvate piirdenurkade võrdsuse põhjal ka $\angle DBC = \angle DCB = \alpha$. Kuna sise- ja välisnurga poolitajad on risti, siis $\angle DAE = 90^\circ$. Seega samale kaarele toetuvate piirdenurkade võrdsuse tõttu ka $\angle DBE = 90^\circ$.

Tingimus, et punktid B, D' ja E on ühel sirgel, on samaväärne tingimusega $\angle DBD' = \angle DBE$ (sest E ja D' on samal pool sirget BD). Eelneva põhjal on viimane võrdus samaväärne tingimusega $\angle DBD' = 90^\circ$. Tingimus $\angle DBD' = 90^\circ$ on samaväärne tingimusega, et B asub ringjoonel diameetriga DD', mis eelduse $|D'F| = |DF|$ valguses on omakorda samaväärne tingimusega $|FB| = |FD|$ ehk võrdusega $\angle FDB = \angle FBD = \alpha$. Viimane tingimus on aga samaväärne võrdusega $\angle ACB = \alpha$, sest samale kaarele toetuvate piirdenurkade võrdsuse põhjal $\angle ACB = \angle ADB = \angle FDB$. Kokkuvõttes



Joonis 10

oleme näidanud, et punktid B, D' ja E asuvad ühel sirgel parajasti siis, kui $\angle BAC = 2\alpha = 2\angle ACB$.

4. *(Rasmus Saame)*

Pakis on n kaarti ning igal kaardil on m erinevat sümbolit, kusjuures n ja m on mõlemad positiivsed. Igal kahel kaardil on ülimalt üks ühine sümbol. Tõesta, et kokku esineb kaartidel vähemalt $\dfrac{1+\sqrt{1+4nm(m-1)}}{2}$ erinevat sümbolit.

Lahendus 1. Olgu kaartidel esinevate erinevate sümbolite arv x. Paare kahest erinevast sümbolist on siis kokku $x(x-1)$. Valides suvalise kaardi, on sellel kaardil olevate eri sümbolite paare $m(m-1)$. Kuna igal kahel kaardil on ülimalt üks ühine sümbol, siis eri kaartidel olevate sümbolite paarid ei kattu. Seega on erinevaid paare kahest erinevast ühel ja samal kaardil olevatest sümbolitest kokku $nm(m-1)$. Järelikult kehtib võrratus $x(x-1) \geqslant nm(m-1)$ ehk $x^2 - x - nm(m-1) \geqslant 0$.

Ruutvõrrandi $x^2 - x - nm(m-1) = 0$ lahendid on $\dfrac{1-\sqrt{1+4nm(m-1)}}{2}$ ja $\dfrac{1+\sqrt{1+4nm(m-1)}}{2}$. Kuna pealiikme kordaja on positiivne, siis võrratuse $x^2 - x - nm(m-1) \geqslant 0$ tõesuspiirkonnad on $x \geqslant \dfrac{1+\sqrt{1+4nm(m-1)}}{2}$ ja $x \leqslant \dfrac{1-\sqrt{1+4nm(m-1)}}{2}$. Et aga $\sqrt{1+4nm(m-1)} \geqslant \sqrt{1} = 1$ ja ülesande tingimuste kohaselt $x > 0$, siis teine piirkond ei sobi. Järelikult $x \geqslant \dfrac{1+\sqrt{1+4nm(m-1)}}{2}$.

Lahendus 2. Tõestame esmalt kodeerimis- ja kombinatoorsete disainide teoorias pakkimiste jaoks tuntud Johnsoni tõkke erijuhu $n \leqslant \left\lfloor \dfrac{x}{m} \left\lfloor \dfrac{x-1}{m-1} \right\rfloor \right\rfloor$, kus x on erinevate sümbolite arv. Iga kord, kui kasutame mingit sümbolit, on see samal kaardil $m-1$ muu sümboliga. Kuna muude sümbolite arv on $x-1$, siis saab seda sümbolit kasutada ülimalt $\left\lfloor \frac{x-1}{m-1} \right\rfloor$ korda. Kõigi sümbolite kasutuskordi kokku on seega ülimalt $x \left\lfloor \frac{x-1}{m-1} \right\rfloor$. Seega nende sümbolitega saab täita ülimalt $\left\lfloor \frac{x}{m} \left\lfloor \frac{x-1}{m-1} \right\rfloor \right\rfloor$ kaarti.

Ülesande lahenduse lõpuleviimiseks võime ära jätta alumise täisosa märgid, et saada seos $n \leqslant \frac{x^2-x}{m^2-m}$, mille teisendamisel jõuame ülesandes nõutud tõkkeni.

5. *(Härmel Nestra)*

Kellaga on võimalik teha järgmisi operatsioone.

1) Keerata suurt osutit suvalise nurga võrra emmas-kummas suunas, mispuhul ühtlasi pöördub väike osuti 12 korda väiksema nurga võrra samas suunas.
2) Keerata korraga mõlemat osutit suvalise ühe ja sama nurga võrra ühes ja samas suunas.

Leia vähim selline nurk α, et kell on võimalik suvalisest algasendist õigeks keerata nii, et suur osuti pöördub mõlemat liiki operatsioonide käigus kokku ülimalt nurga α võrra (kummaski suunas tehtud pöörded lähevad arvesse plussmärgiga).

Märkus 1. Algasendis ei tarvitse osutid näidata ühtki korrektset kellaaega.

Märkus 2. Mitte arvestada aja edasikulgemisega kella keeramise jooksul.

Vastus: 360°.

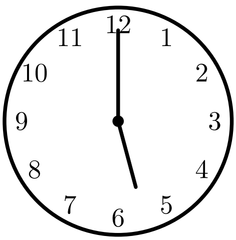
Lahendus 1. Üldisust kitsendamata eeldame, et õige aeg on 12.00.

Näitame, et suvalisest algasendist on võimalik kell õigeks keerata nii, et suur osuti pöördub ülimalt 360° võrra. Vaatame kolme juhtu.

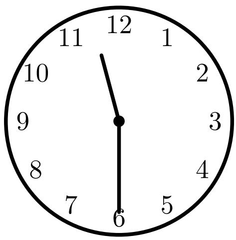
- Kui väike osuti asub 12-st vähemalt 30° kaugusel emmas-kummas suunas ja suur osuti asub päripäeva lugedes 12 ja väikse osuti vahel, siis keerame korraga mõlemat osutit edasi kuni asendini, kus väike osuti on 11 ja 12 vahel ja osutid näitavad mingit legaalset kellaaega. Selline asend kindlasti leidub, sest tänu tehtud eeldustele on suur osuti väiksest ülimalt 330° võrra maas. Edasi liigutame suurt osutit samas suunas kuni 12-ni, millega saab kell õigeks. Kuna esimese etapi käigus ilmselt ei liigu suur osuti üle 12, siis ei liigu suur osuti kokku rohkem kui 360° võrra.
- Kui väike osuti asub 12-st vähemalt 30° kaugusel emmas-kummas suunas ja suur osuti asub päripäeva lugedes väikse osuti ja 12 vahel, siis toimime sümmeetriliselt eelmise juhuga. Sarnaselt eelmise juhuga ei liigu suur osuti kokku rohkem kui 360° võrra.

- Kui väike osuti asub 12-st vähem kui 30° kaugusel emmas-kummas suunas, siis keerame korraga mõlemat osutit nii, et osutid näitaksid legaalset kellaaega ja väike osuti on seejuures 12-le lähimas punktis. Kuna osuteid $\frac{1}{11}$ täisringi võrra pöörates läbitakse kindlasti asendit, kus nad näitavad legaalset kellaaega, asub see lähim punkt 12-st ülimalt $\frac{1}{22}$ täisringi kaugusel. Seega liigub kumbki osuti selle etapi jooksul vähem kui $\frac{1}{12} + \frac{1}{22}$ täisringi võrra. Peale seda piisab suurt osutit keerata ülimalt $\frac{12}{22}$ täisringi võrra, et kell õigeks saada. Ilmselt $\frac{1}{12} < \frac{9}{22} = 1 - \frac{1}{22} - \frac{12}{22}$, mistõttu liigub suur osuti kokku vähem kui 360°.

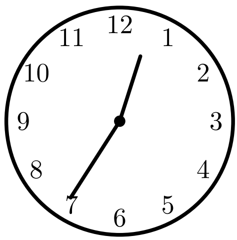
Näitame nüüd, et leidub algasend, mille puhul on kella õigekskeeramiseks vaja pöörata suurt osutit 360° võrra. Selline algasend on näiteks see, kus suur osuti asub 12 peal ja väike osuti asub 5 ja 6 vahel täpselt nende keskel (joonis 11). Ilmselt ei sõltu kellakeeramise tulemus operatsioonide järjestusest, vaid ainult sellest, kui suure nurga võrra tehakse esimest liiki ja kui suure nurga võrra teist liiki pööret. Seetõttu eeldame üldisust kitsendamata, et kellakeeramine koosneb ühest teist liiki pöördest ja ühest esimest liiki pöördest. Kui teist liiki pöörde järel jääb väike osuti 12-st rohkem kui $\frac{1}{12}$ täispöörde kaugusele, siis peab suur osuti ainuüksi järgneva esimest liiki pöörde käigus liikuma rohkem kui 360° võrra. Seega jääb vaadelda olukorda, kus väike osuti satub pärast teist liiki pööret kas 11 ja 12 või 12 ja 1 vahele. Kuna osutid peavad juba siis näitama legaalset kellaaega (sest esimest liiki pööre legaalsusstaatust ei muuda), siis esimesel juhul näitab kell 11.30 (joonis 12), teisel juhul on aga mõlemad osutid $\frac{1}{11}$ täispöörde võrra kaugemal (joonis 13). Esimesel juhul on suur osuti teist liiki pöörde käigus liikunud 180° võrra ja järgneva esimest liiki pöörde käigus liigub veel 180° võrra, kokku liigub ta niisiis 360° võrra. Teisel juhul on suur osuti teist liiki pöörde käigus liikunud $\frac{1}{11}$ täispööret vähem, kuid järgneva esimest liiki pöörde



Joonis 11



Joonis 12



Joonis 13

käigus liigub ta $\frac{1}{11}$ täispööret rohkem, seega kokku liigub ta ikka 360° võrra. Sellega on tõestatud, et vaadeldavas asendis peab kella õigekskeeramisel suur osuti pöörduma vähemalt 360° võrra.

Lahendus 2. Üldisust kitsendamata eeldame, et õige aeg on 12.00. Samuti paneme tähele, et kumbagi operatsiooni piisab teha ühe korra, sest kahe operatsiooni omavahelise järjestuse vahetamine ei muuda tulemust. Seega võib eeldada, et algul viiakse esimese operatsiooni teel kellaosutid kohakuti ja seejärel teise operatsiooniga osutid 12 peale. Liikugu suur osuti esimese ja teise operatsiooni käigus vastavalt nurkade θ_1 ja θ_2 jagu.

Olgu φ nurk, mille võrra on kella väike osuti algasendis suurest osutist eespool ($\varphi \in [0, 2\pi)$). Olgu O_1 punkt kella serval, millele viitab algasendis suur osuti, ning olgu O_2 punkt kella serval, millele viitavad mõlemad osutid peale seda, kui me oleme suurt osutit nihutanud ettepoole, kuni ta on kohakuti väikese osutiga. Ilmselt on punkt O_2 punktist O_1 eespool nurga $\frac{12}{11}\varphi$ võrra. Lõpuks olgu ψ nurk, mille võrra on osutite sihtasend (kell 12) eespool punktist O_2 ($\psi \in [0, 2\pi)$).

Meil on kaks erinevat viisi kellaosutite sihtasendisse viimiseks.

Esimesel variandi puhul liigutame suurt osutit edasi, kuni ta on kohakuti väikese osutiga (selleks hetkeks viitavad osutid punktile O_2), ning viime osutid seejärel koos sihtasendisse. Sel juhul $\theta_1 = \frac{12}{11}\varphi$ ja $\theta_2 = \min(\psi, 2\pi - \psi)$.

Teisel variandil liigutame suurt osutit kõigepealt tagasi, kuni ta on kohakuti väikese osutiga. Selleks ajaks on ta liikunud nurga $\theta_1 = \frac{12}{11}(2\pi - \varphi)$ võrra ning viitab nüüd punktile kella serval, mis on punktist O_2 nurga $\frac{2}{11}\pi$ võrra tagapool. Nurga θ_2 kohta saame järgmised võimalused.

- Kui $\psi \leqslant \frac{9}{11}\pi$, siis tuleb osuteid keerata edasi nurga $\theta_2 = \psi + \frac{2}{11}\pi$ võrra.
- Kui $\frac{9}{11}\pi \leqslant \psi \leqslant \frac{20}{11}\pi$, siis tuleb osuteid keerata tagasi nurga $\theta_2 = \frac{20}{11}\pi - \psi$ võrra.
- Kui $\psi \geqslant \frac{20}{11}\pi$, siis tuleb osuteid keerata edasi nurga $\theta_2 = \psi - \frac{20}{11}\pi$ võrra.

Konkreetsete φ ja ψ jaoks huvitab meid avaldise $\theta_1 + \theta_2$ minimaalne väärtus üle kahe kirjeldatud variandi. Vastavalt eelkirjeldatud variantidele tekib siin neli erinevat võimalust.

- Olgu $0 \leqslant \psi \leqslant \frac{9}{11}\pi$. Siis esimesel variandil $\theta_1 + \theta_2 = \frac{12}{11}\varphi + \psi$. Teisel variandil $\theta_1 + \theta_2 = \frac{24}{11}\pi - \frac{12}{11}\varphi + \psi + \frac{2}{11}\pi = \frac{26}{11}\pi - \frac{12}{11}\varphi + \psi$. Näeme, et see, kas väiksem on esimene või teine variant, ei sõltu nurgast ψ;

mõlemad on suurimad siis, kui $\psi = \frac{9}{11}\pi$. Esimese variandi väärtus φ kasvades kasvab (ψ-st kuni $\frac{24}{11}\pi + \psi$-ni), teise variandi väärtus kahaneb ($\frac{26}{11}\pi + \psi$-st kuni $\frac{2}{11}\pi + \psi$-ni). Nende kahe variandi miinimum saavutab oma maksimaalse väärtuse siis, kui need variandid on võrdsed ehk $\frac{12}{11}\varphi = \frac{26}{11}\pi - \frac{12}{11}\varphi$. Siit saame $\frac{24}{11}\varphi = \frac{26}{11}\pi$ ja $\varphi = \frac{13}{12}\pi$. Sel hetkel on $\theta_1 + \theta_2 = \frac{12}{11} \cdot \frac{13}{12}\pi + \frac{9}{11}\pi = 2\pi$.

- Olgu $\frac{9}{11} \leqslant \psi \leqslant \pi$. Siis esimesel variandil $\theta_1 + \theta_2 = \frac{12}{11}\varphi + \psi$. Teisel variandil $\theta_1 + \theta_2 = \frac{24}{11}\pi - \frac{12}{11}\varphi + \frac{20}{11}\pi - \psi = 4\pi - \frac{12}{11}\varphi - \psi$. Näeme, et esimese ja teise variandi summa on alati 4π ning minimaalne neist on seega ülimalt 2π.
- Olgu $\pi \leqslant \psi \leqslant \frac{20}{11}\pi$. Siis esimesel variandil $\theta_1+\theta_2 = \frac{12}{11}\varphi+2\pi-\psi$ ja teisel variandil $\theta_1+\theta_2 = \frac{24}{11}\pi-\frac{12}{11}\varphi+\frac{20}{11}\pi-\psi = 4\pi-\frac{12}{11}\varphi-\psi$. Näeme, et see, kas väiksem on esimene või teine variant, ei sõltu nurgast ψ; mõlemad on suurimad siis, kui $\psi = \pi$. Esimese variandi väärtus φ kasvades kasvab, teisel kahaneb. Miinimum on suurim siis, kui need kaks väärtust on võrdsed ehk $\frac{12}{11}\varphi+2\pi = 4\pi-\frac{12}{11}\varphi$. See võrdne väärtus on ilmselt 3π. Kui arvestame ka nurgaga ψ, siis saame $\theta_1 + \theta_2$ maksimaalseks väärtuseks 2π.
- Olgu $\frac{20}{11}\pi \leqslant \psi \leqslant 2\pi$. Siis esimesel variandil $\theta_1 + \theta_2 = \frac{12}{11}\varphi + 2\pi - \psi$ ja teisel variandil $\theta_1 + \theta_2 = \frac{24}{11}\pi - \frac{12}{11}\varphi + \psi - \frac{20}{11}\pi = \frac{4}{11}\pi - \frac{12}{11}\varphi + \psi$. Näeme, et esimese ja teise variandi summa on $\frac{26}{11}\pi$ ning minimaalne neist on seega ülimalt pool sellest.

Saame, et $\theta_1 + \theta_2$ maksimaalne väärtus on 2π. Eelnev arutelu näitab ka, et väärtus 2π on saavutatav.

Lahendused

1. *(Hendrik Vija, Härmel Nestra)*

Olgu n positiivne täisarv ning k selline täisarv, et $0 < k < n$. Tõesta, et arv C_n^k jagub vähemalt ühe arvu n algteguriga.

Märkus. Kirjutis C_n^k tähistab kombinatsioonide arvu n elemendist k-kaupa.

Lahendus 1. Arvud $n \cdot n$, $n \cdot k$ ja $C_n^k \cdot n$ ilmselt jaguvad kõik arvuga n. Kuna $C_n^k \cdot k = C_{n-1}^{k-1} \cdot n$, siis ka arv $C_n^k \cdot k$ jagub arvuga n. Seega arv $\text{SÜT}(n \cdot n, n \cdot k, C_n^k \cdot n, C_n^k \cdot k)$ jagub arvuga n. Paneme aga tähele, et

$$\text{SÜT}(n \cdot n, n \cdot k, C_n^k \cdot n, C_n^k \cdot k) = \text{SÜT}(n, C_n^k) \cdot \text{SÜT}(n, k),$$

sest korrutamine on suurima ühisteguri leidmise suhtes distributiivne. Seega korrutis $\text{SÜT}(n, C_n^k) \cdot \text{SÜT}(n, k)$ jagub arvuga n, millest tulenevalt saame $\text{SÜT}(n, C_n^k) \cdot \text{SÜT}(n, k) \geqslant n$. Et aga $\text{SÜT}(n, k) < n$, siis $\text{SÜT}(n, C_n^k) > 1$, mis näitabki, et C_n^k peab jaguma vähemalt ühe arvu n algteguriga.

Lahendus 2. Kuna $0 < k < n$, siis leidub arvu n selline algtegur p, mille astendaja arvu k kanoonilises esituses on väiksem kui arvu n kanoonilises esituses; olgu viimane astendaja s. Teame, et $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, kus $m!$ tähistab korrutist $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m$. Selles korrutises on arvuga p jaguvaid tegureid $\left\lfloor \dfrac{m}{p} \right\rfloor$, arvuga p^2 jaguvaid tegureid $\left\lfloor \dfrac{m}{p^2} \right\rfloor$ jne, üldiselt arvuga p^i jaguvaid tegureid $\left\lfloor \dfrac{m}{p^i} \right\rfloor$, kus $\lfloor x \rfloor$ tähistab arvu x täisosa (suurimat täisarvu, mis pole suurem kui x). Seega algarvu p astendaja murru $\dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ lugeja kanoonilises esituses on $\left\lfloor \dfrac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots$, nimetajas aga $\left(\left\lfloor \dfrac{k}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{k}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{k}{p^3} \right\rfloor + \ldots \right) + \left(\left\lfloor \dfrac{n-k}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{n-k}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{n-k}{p^3} \right\rfloor + \ldots \right)$. Paneme tähele, et iga astendaja i korral

$$\left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-k}{p^i} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{k}{p^i} + \frac{n-k}{p^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k + (n-k)}{p^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor,$$

kusjuures juhul $i = s$ on võrratus range, sest $\frac{k}{p^s}$ ja $\frac{n-k}{p^s}$ ei ole täisarvud, aga $\frac{n}{p^s}$ on. Järelikult on algarvu p astendaja nimetaja kanoonilises esituses väiksem kui lugeja kanoonilises esituses. Seega arv C_n^k jagub algarvuga p.

Märkus. Valemit, mis ütleb, et algarvu p astendaja arvu $m!$ kanoonilises esituses on $\left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^3} \right\rfloor + \ldots$, nimetatakse *Legendre'i valemiks.*

2. *(Urve Kangro)*

Olgu $P(x)$ polünoom astmega 2023, kus kõik kordajad on nullid ja ühed, kusjuures $P(0) = 1$. Tõesta, et kõik polünoomi $P(x)$ reaalarvulised juured on väiksemad kui $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Märkus. Polünoom $P(x)$ on täpselt ühest tundmatust x sõltuv avaldis kujul $a_l x^l + a_{l-1} x^{l-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, kus $a_l \neq 0$ ja l on mingi naturaalarv. Arvu l nimetatakse selle polünoomi *astmeks*, arve $a_l, a_{l-1}, \ldots, a_1, a_0$ aga selle polünoomi *kordajateks*. Iga arvu c korral tähendab $P(c)$ avaldise $P(x)$ väärtust, kui võtta tundmatu x väärtuseks c. Polünoomi $P(x)$ *juureks* nimetatakse arvu c, mille korral $P(c) = 0$.

Lahendus 1. Olgu a polünoomi $P(x)$ suvaline reaalarvuline juur, st $P(a) = 0$. Ilmselt $a < 0$, sest muutuja x mittenegatiivse väärtuse puhul on kõik liikmed mittenegatiivsed ja vabaliige $P(0)$ on positiivne. Kuna muutuja x paaris astendajaga liikmed kordajaga 1 on positiivsed, paaritu astendajaga liikmed kordajaga 1 aga negatiivsed, siis paaris astendajaga liikmete eemaldamisel ja paaritu astendajaga liikmete lisamisel (kõik kordajaga 1) saab polünoomi väärtus minna ainult väiksemaks. Järelikult $P(a) \geqslant 1 + a + a^3 + a^5 + \ldots + a^{2023}$ (kõik paaris astmed jätame ära ja lisame puuduvad paaritud astmed). Geomeetrilise jada osasumma valemi põhjal $a + a^3 + a^5 + \ldots + a^{2023} = \frac{a - a^{2025}}{1 - a^2}$, seega

$$P(a) \geqslant 1 + \frac{a - a^{2025}}{1 - a^2} = \frac{1 - a^2 + a - a^{2025}}{1 - a^2}.$$

Märkame, et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ on ruutvõrrandi $x^2 - x - 1 = 0$ väiksem lahend, sama ruutvõrrandi suurem lahend on aga positiivne. Seega oletades väitevastaselt, et $a \geqslant \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, saaksime $a^2 - a - 1 \leqslant 0$ ehk $1 - a^2 + a \geqslant 0$. Kuna $-a^{2025} > 0$ ja $1 - a^2 > 0$, siis kokkuvõttes $P(a) \geqslant \frac{1 - a^2 + a - a^{2025}}{1 - a^2} > 0$, mis on vastuolus eeldusega $P(a) = 0$.

Lahendus 2. Nagu lahenduses 1 näitame, et kõik lahendid on negatiivsed ja negatiivse a korral $P(a) \geqslant a^{2023} + a^{2021} + \cdots + a + 1$.

Näitame matemaatilise induktsiooni abil, et kui $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqslant a < 0$, siis $a^{2n+1} + a^{2n-1} + \cdots + a + 1 > 0$, kus $n = 1, 2, \ldots$. Kui $n = 1$, siis

$$a^3 + a + 1 > -a^2 + a + 1 \geqslant 0.$$

Oletame, et väide kehtib mingi $n = k$ korral ja näitame, et siis väide kehtib ka $n = k + 1$ korral:

$$a^{2k+3} + a^{2k+1} + \ldots a^3 + a + 1 = a^2(a^{2n+1} + a^{2n-1} + \ldots a + 1) + (-a^2 + a + 1) > 0,$$

sest esimene sulgavaldis on positiivne ja teine on mittenegatiivne.

3. *(Kaur Aare Saar)*

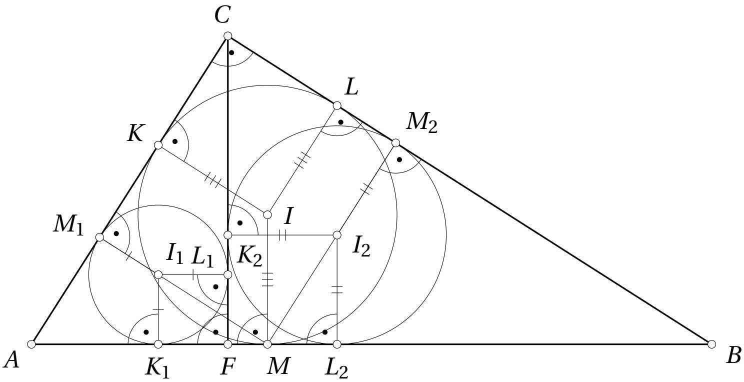
Kolmnurgas ABC on $\angle ACB = 90°$. Olgu F tipust C tõmmatud kõrguse aluspunkt. Olgu kolmnurkade ABC, ACF ja BCF siseringjoonte keskpunktid vastavalt I, I_1 ja I_2 ning olgu M, M_1 ja M_2 vastavalt kolmnurkade ABC, ACF ja BCF siseringjoonte puutepunktid nende kolmnurkade hüpotenuusidega AB, CA ja CB. Tõesta, et M on kolmnurga II_1I_2 ümberringjoone keskpunkt ja ühtlasi sirgete M_1I_1 ja M_2I_2 lõikepunkt.

Lahendus 1. Üldisust kitsendamata $|AC| \leqslant |BC|$. Olgu kolmnurkade ABC, ACF ja BCF siseringjoonte raadiused vastavalt r, r_1 ja r_2. Olgu kolmnurga ABC siseringjoone puutepunktid kaatetitega AC ja BC vastavalt K ja L, kolmnurga ACF siseringjoone puutepunktid kaatetitega AF ja CF vastavalt K_1 ja L_1 ning kolmnurga BCF siseringjoone puutepunktid kaatetitega CF ja BF vastavalt K_2 ja L_2 (joonis 14).

Tähistame veel $|K_1M| = l_1$ ja $|L_2M| = l_2$. Märkame, et $|KC| = |LC| = r$, sest nelinurk $CKIL$ on kolme täisnurga tõttu ristkülik ja $|IK| = |IL| = r$ tõttu ruut küljepikkusega r. Analoogselt saame $|K_1F| = |L_1F| = r_1$ ja $|K_2F| = |L_2F| = r_2$. Seega $l_1 + l_2 = |K_1L_2| = r_1 + r_2$. Samas puutujalõikude võrdsusest tulenevalt

$$\begin{aligned}
l_1 - l_2 &= (|AM| - |AK_1|) - (|BM| - |BL_2|) = \\
&= (|AK| - |AM_1|) - (|BL| - |BM_2|) = \\
&= (|CM_1| - |CK|) - (|CM_2| - |CL|) = \\
&= (|CL_1| - r) - (|CK_2| - r) = \\
&= |CL_1| - |CK_2| = \\
&= (|CF| - |FL_1|) - (|CF| - |FK_2|) = \\
&= |FK_2| - |FL_1| = \\
&= r_2 - r_1.
\end{aligned}$$

Võrdustest $l_1 + l_2 = r_1 + r_2$, $l_1 - l_2 = r_2 - r_1$ saame üheselt $l_1 = r_2$, $l_2 = r_1$. Järelikult I_1MK_1 ja MI_2L_2 on võrdsed täisnurksed kolmnurgad, mille kaatetid on pikkusega r_1 ja r_2.



Joonis 14

Kolmnurgad ACF ja CBF on tunnuse NN järgi sarnased kolmnurgaga ABC, kusjuures sarnasustegurid on vastavalt $\frac{|AC|}{|AB|}$ ja $\frac{|BC|}{|AB|}$. Seega $\frac{r_1}{r} = \frac{|AC|}{|AB|}$ ja $\frac{r_2}{r} = \frac{|BC|}{|AB|}$, millest kokku saame $\frac{r_1}{|AC|} = \frac{r}{|AB|} = \frac{r_2}{|BC|}$. Järelikult on kolmnurgad I_1MK_1 ja MI_2L_2 tunnuse KNK põhjal sarnased kolmnurgaga ABC, kusjuures $|I_1M| = |I_2M| = r = |IM|$. Seega M on kolmnurga II_1I_2 ümberringjoone keskpunkt. Lisaks saame $\angle K_1MI_1 = \angle ABC$ ja $\angle L_2MI_2 = \angle BAC$, kust vastavalt $MI_1 \parallel BC$ ja $MI_2 \parallel AC$ ehk vastavalt $MI_1 \perp AC$ ja $MI_2 \perp BC$. Seega MI_1 ja MI_2 pikendused läbivad vastavalt punkte M_1 ja M_2, mis näitab, et sirged M_1I_1 ja M_2I_2 lõikuvad punktis M.

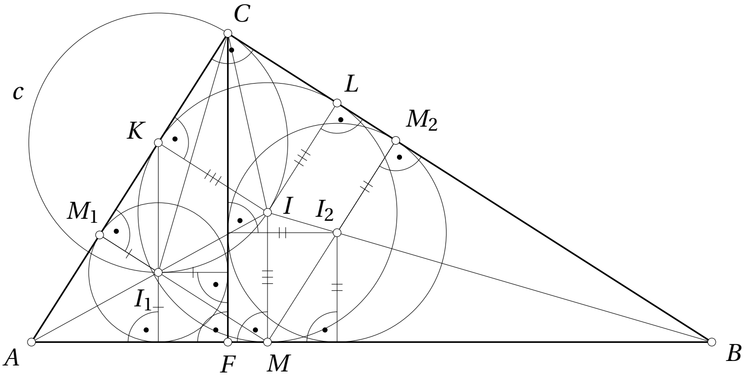
Lahendus 2. Sarnaselt lahendusega 1 defineerime punktid K ja L ja veendume, et $CKIL$ on ruut. Vaatleme ringjoont c keskpunktiga K, mis läbib punkte C ja I (joonis 15). Täisnurk CKI on selles kõõlule CI toetuv kesknurk.

Tähistame $\angle BAI = \angle CAI = \alpha$. Siis $\angle AIK = \angle AIM = 90^\circ - \alpha$ ning ka $\angle BAI_1 = \angle CAI_1 = \alpha$, $\angle AI_1M_1 = 90^\circ - \alpha$. Kolmnurk KIC on võrdhaarne ja täisnurkne, seega $\angle KIC = 45^\circ$ ja $\angle KCI = \angle ACI = 45^\circ$. Et $\angle ACF = 90^\circ - \angle CAF = 90^\circ - 2\alpha$, siis $\angle ACI_1 = \frac{\angle ACF}{2} = 45^\circ - \alpha$.

Leiame nurga CI_1I suuruse. Kolmnurgast CI_1I saame, et

$$\begin{aligned}\angle CI_1I &= 180^\circ - \angle I_1CI - \angle I_1IC = \\ &= 180^\circ - \angle ACI + \angle ACI_1 - \angle I_1IK - \angle KIC = \\ &= 180^\circ - 45^\circ + \left(45^\circ - \alpha\right) - \left(90^\circ - \alpha\right) - 45^\circ = 45^\circ = \frac{\angle CKI}{2}.\end{aligned}$$

Seega I_1 asub ringjoonel c, sest nurga CI_1I suurus on pool kõõlule CI toetuva kesknurga CKI suurusest. Järelikult $|KI_1| = |KI|$. Kuna aga AIM ja



Joonis 15

AIK on kaks võrdset täisnurkset kolmnurka, siis on punktid M ja K sirge AI suhtes sümmeetrilised. Samal sirgel asub ka punkt I_1. Seega sümmeetria tõttu $|MI_1| = |MI|$.

Näitame nüüd, et sirge M_1I_1 läbib punkti M, näidates, et $\angle M_1I_1M = 180^\circ$. Võrdhaarsest kolmnurgast IMI_1 saame $\angle II_1M = \angle I_1IM = 90^\circ - \alpha$. Et $\angle M_1I_1I = 180^\circ - \angle AI_1M_1 = 180^\circ - \left(90^\circ - \alpha\right) = 90^\circ + \alpha$, siis

$$\angle M_1I_1M = \angle M_1I_1I + \angle II_1M = \left(90^\circ + \alpha\right) + \left(90^\circ - \alpha\right) = 180^\circ,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Analoogselt saame näidata, et $|MI| = |MI_2|$ ja $\angle M_2I_2M = 180^\circ$.

Märkus. Lisaks saab veel näidata, et ringjoonte c_1 ja c_2 teine sisemine ühispuutuja (peale sirge CF) läbib punkti M.

4. *(Hendrik Vija)*

Matemaatikaolümpiaadi korralduseelarvest on puudu n eurot. Probleemi lahendamiseks otsustab komisjoni esimees varastada juveelipoest täpselt n euro väärtuses juveele. Juveelipoes on reas juveelid, millest esimese kahe väärtused on vastavalt 1 ja 2 eurot ning iga juveel alates kolmandast maksab täpselt niisama palju kui eelmised kaks kokku (ehk järgmiste juveelide väärtused on $3, 5, 8, 13, \ldots$ eurot). Juveelipoes on aga alarm, mis aktiveerub, kui võtta reast ära kaks kõrvutiasuvat juveeli. Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille puhul on komisjoni esimehel võimalik varastada täpselt n euro väärtuses juveele ilma alarmi aktiveerimata.

Vastus: kõik positiivsed täisarvud n.

Lahendus 1. Tõestame induktsiooniga, et iga positiivse täisarvu n korral on võimalik eemaldada n euro väärtuses juveele ilma alarmi aktiveerimata.

Baasjuhul $n = 1$ sobib võtta ainult juveel väärtusega 1 euro. Eeldame nüüd, et $n > 1$ ning juveelide hulki kogumaksumusega 1 kuni $n-1$ eurot on võimalik eemaldada ilma alarmi aktiveerimata. Näitame, et ka n euro puhul on see võimalik. Olgu reas olevate juveelide väärtused $a_1, a_2, \ldots$ eurot. Valime sellise positiivse täisarvu k, et $a_k \leqslant n < a_{k+1}$. Võtame reast ära k-nda juveeli. Kui $a_k = n$, siis on ülesanne täidetud ilma alarmi aktiveerimata. Kui $a_k < n$, siis tuleb lisaks võtta juveele $n - a_k$ euro väärtuses. Induktsiooni eelduse põhjal on võimalik seda teha ilma alarmi aktiveerimata, kui k-nda juveeli eemaldamist mitte arvestada. Kuna aga $n - a_k < a_{k+1} - a_k = a_{k-1}$, siis juveelid koguväärtusega $n - a_k$ eurot on kõik võetud $k-2$ esimese juveeli seast. Seega ei aktiveeri ka k-nda juveeli võtmine alarmi. See tõestab induktsiooni sammu ja ühtlasi ka soovitud väite.

Lahendus 2. Tõestame, et kui n euro väärtuses juveele saab eemaldada alarmi aktiveerides, siis saab seda ka teha ilma alarmi aktiveerimata. Selleks teisendame algset juveelide valikut sammhaaval. Igal sammul asendame valikus olevatest juveelidest kaks kalleimat kõrvuti asuvat juveeli väärtusega a_k ja a_{k+1} juveeliga, mille väärtus on a_{k+2}. Juveel a_{k+2} ei saa olla eelnevas valikus, kuna muidu poleks valitud kaks juveeli väärtusega a_k ja a_{k+1} kalleimad kõrvuti asuvad juveelid. Kuna sedasi vähendame valikus olevate juveelide arvu 1 võrra, jõuame varem või hiljem olukorrani, valikus pole kõrvuti asuvaid juveele.

Tõestame nüüd induktsiooniga, et iga positiivse täisarvu n korral on võimalik eemaldada n euro väärtuses juveele ilma alarmi aktiveerimata. Baasjuhul $n = 1$ sobib võtta ainult juveel väärtusega 1 euro. Eeldame nüüd, et $n > 1$ ning võimalik on eemaldada juveelide hulk kogumaksumusega $n-1$ eurot ilma alarmi aktiveerimata. Kui selles juveelide hulgas puudub 1-eurone juveel, siis lisame selle juveeli valikusse, vastasel juhul asendame valikus selle juveeli 2-eurose juveeliga – see on võimalik, sest emb-kumb neist juveelidest ei saa olla valikus koguväärtusega $n-1$ eurot, muidu aktiveeruks alarm. Saadud uue valiku koguväärtus on n eurot. Kui uus valik aktiveeriks alarmi, siis teisendame eelmises lõigus näidatud viisil valiku selliseks, et alarm ei aktiveeru. Sellega on induktsiooni samm läbi viidud.

Märkus. Juveelide väärtused eurodes on nn *Fibonacci arvud.* Naturaalarvu esitust erinevate mittejärjestikuste Fibonacci arvude summana nimetatakse *Fibonacci esituseks.* See ülesanne näitab, et igal naturaalarvul leidub Fibonacci esitus (see fakt on muidugi ammu tuntud).

5. *(Kaarel Hänni)*

Nimetame permutatsiooni $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ arvudest $1, 2, \ldots, n$ *vahelduvaks,* kui iga $i = 1, \ldots, n-1$ korral $(-1)^i \sigma_i < (-1)^i \sigma_{i+1}$. Iga naturaalarvu n korral olgu α_n vahelduvate permutatsioonide osakaal kõigi permutatsioonide hulgas arvudest $1, 2, \ldots, n$. (Näiteks $\alpha_1 = \frac{1}{1}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_3 = \frac{2}{6}$ jne.) Tõesta, et leiduvad reaalarvud c_1, c_2 vahemikust $(0;1)$ ning naturaalarv N, nii et iga naturaalarvu $n \geqslant N$ korral $(c_1)^n < \alpha_n < (c_2)^n$.

Lahendus 1. Tõestame nõutud reaalarvude c_1, c_2 olemasolu, kui fikseerida $N = 2$.

Näitame esmalt, et leidub c_1. Juhul $n = 2m$ mingi naturaalarvu m korral vaatleme permutatsioone, mille paaritutel kohtadel on m-st suuremad elemendid ja paaris kohtadel ülejäänud elemendid. Iga selline permutatsioon on vahelduv ja neid on kokku $(m!)^2$. Kuna n elemendi permutatsioonide koguarv on $n!$, siis järelikult $\dfrac{(m!)^2}{n!} \leqslant \alpha_n$. Märkame, et

$$\frac{(m!)^2}{n!} = \frac{(m!)^2}{(1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)) \cdot (2\cdot 4\cdot \ldots \cdot n)} > \frac{(m!)^2}{(2\cdot 4\cdot \ldots \cdot n)^2} = \frac{(m!)^2}{(2^m \cdot m!)^2} = \frac{1}{2^n}.$$

Seega iga positiivse n korral $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n < \alpha_n$. Kui $n = 2m+1$ mingi naturaalarvu m korral, siis paneme permutatsiooni viimaseks elemendiks n ja ülejäänud elementidega käitume analoogiliselt. Sarnaselt eelnevaga saame $\dfrac{(m!)^2}{n!} \leqslant \alpha_n$ ning $\dfrac{(m!)^2}{n!} > \dfrac{1}{2^{n-1} \cdot n}$. Kuna $n < 2^n$, siis viimasest võrratusest järeldub $\dfrac{(m!)^2}{n!} > \dfrac{1}{2^n \cdot 2^n} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$. Kokkuvõttes sobib võtta $c_1 = \dfrac{1}{4}$.

Näitame nüüd, et leidub c_2. Jagame iga vahelduva permutatsiooni elemendid $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ järjestikusesse paari (paaritu n korral jääb üks element üle). Vahetades vabalt paaride liikmete omavahelist järjestust, saame ühest vahelduvast permutatsioonist genereerida $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ erinevat permutatsiooni. Seejuures saab iga permutatsioon tekkida ainult ühest vahelduvast permutatsioonist, sest vahelduvas permutatsioonis on iga paari liikmete omavaheline järjestus üheselt määratud. See näitab, et $\alpha_n \leqslant \dfrac{1}{2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{2\cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \leqslant \dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}}$.

Võttes $\varepsilon > 0$ nii, et $(1+\varepsilon)^2 < \sqrt{2}$, kehtib $(1+\varepsilon)^n < \left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$. Seega sobib $c_2 = \dfrac{1}{1+\varepsilon}$.

Lahendus 2. Tõestame nõutud reaalarvude c_1, c_2 olemasolu, kui fikseerida $N = 2$. Iga naturaalarvu k korral tähistagu s_k vahelduvate permutatsioonide arvu; siis $s_k = \alpha_k \cdot k!$ ja muuhulgas $s_0 = \alpha_0 = 1$.

Arv n saab asuda ainult paaritul positsioonil. Kui see positsiooni number on $2j+1$, siis väiksema numbriga positsioonidel võivad olla ükskõik millised $2j$ arvu ülejäänutest. Nende hulga valikuks on C_{n-1}^{2j} võimalust ning valitud arvude paigutamiseks positsioonidele $1, 2, \ldots, 2j$ on täpselt s_{2j} võimalust (siin $s_0 = 1$). Ülejäänud arvude paigutamiseks positsioonidele $2j+2, \ldots, n$ on s_{n-2j-1} võimalust. Kuna $2j+1 \leqslant n$, siis

$$s_n = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_{n-1}^{2j} s_{2j} s_{n-1-2j},$$

kust arvuga $n!$ taandamisel saame

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \alpha_{2j} \alpha_{n-1-2j}.$$

Näitame kõigepealt induktsiooniga, et iga $n \geqslant 1$ korral $(c_1)^n < \alpha_n$, kus võib võtta näiteks $c_1 = \frac{1}{2}$. Baasjuht $n = 1$ kehtib. Olgu nüüd $n > 1$ ja eeldame, et iga väiksema positiivse täisarvu korral väide kehtib. Siis

$$\alpha_n > \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (c_1)^{2j} (c_1)^{n-1-2j} = \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor (c_1)^{n-1} \geqslant \frac{1}{2} (c_1)^{n-1} \geqslant (c_1)^n,$$

mistõttu tõestatav väide kehtib ka $n \geqslant 1$ korral.

Näitame nüüd induktsiooniga, et iga $n \geqslant 2$ korral $\alpha_n < (c_2)^n$, kus $c_2 = \frac{3}{4}$. See võrratus kehtib juhul $n = 2$. Olgu nüüd $n > 2$ ja eeldame, et väiksemate 1-st suuremate täisarvude korral väide kehtib. Kui $n = 2k+1$, siis võrdust $\alpha_0 = 1$ arvestades saame

$$\alpha_n = \alpha_{2k+1} \leqslant \frac{1}{2k+1} \sum_{j=0}^{k} (c_2)^{2j} (c_2)^{2k-2j} = \frac{k+1}{2k+1} (c_2)^{2k} < (c_2)^{2k+1} = (c_2)^n,$$

sest $c_2 = \frac{3}{4} > \frac{2}{3} \geqslant \frac{k+1}{2k+1}$, kui $k \geqslant 1$. Kui aga $n = 2k$, siis võrdusi $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ arvestades saame

$$\begin{aligned}\alpha_n = \alpha_{2k} &\leqslant \frac{1}{2k} \left(\left(\sum_{j=0}^{k-2} (c_2)^{2j} (c_2)^{2k-1-2j} \right) + (c_2)^{2k-2} \right) = \\ &= \frac{k-1}{2k} (c_2)^{2k-1} + \frac{1}{2k} (c_2)^{2k-2} = \left(\frac{k-1}{2k} + \frac{1}{2k \cdot c_2} \right) (c_2)^{2k-1}.\end{aligned}$$

Kuna $c_2 = \frac{3}{4} \geqslant \frac{k+1}{2k}$, kui $k \geqslant 2$, saame

$$\frac{k-1}{2k} + \frac{1}{2k \cdot c_2} \leqslant \frac{k-1}{2k} + \frac{1}{k+1} = \frac{k^2 - 1 + 2k}{2k(k+1)} < \frac{k^2 + 1 + 2k}{2k(k+1)} = \frac{k+1}{2k} \leqslant c_2,$$

mistõttu $\alpha_n < (c_2)^{2k} = (c_2)^n$. Seega tõestatav väide kehtib iga $n \geqslant 2$ korral.

Märkus. Sobivaks saab teha iga $c_1 < \frac{2}{\pi}$ ja $c_2 > \frac{2}{\pi}$. Huvilised vaadaku netilehte https://en.wikipedia.org/wiki/Alternating_permutation.

Hindamisskeemid ja kontrollijate kommentaarid

1. *(Maksim Ivanov)*

Erinevate lähenemiste hindamisel kasutati kaht eraldi skeemi.

Žürii lahendusega sarnanevate mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Etteantud võrdustest järeldatud võrdus $ab + c^2 = 1$: 1 p
- Järeldatud võrdus $ab = (1 - c)(1 + c)$: 1 p
- Korrutis abc esitatud kujul $(1 - c)c(1 + c)$: 1 p
- Mistahes viisil ammendavalt põhjendatud, et abc jagub 3-ga: 4 p

Tööde, kus c asendati võrdustes summaga $a + b$, allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Etteantud võrdustest järeldatud võrdus $a^2 + 3ab + b^2 = 1$: 1 p
- Märgitud, et $3ab$ jagub 3-ga: 1 p
- Märgitud, et täisruut annab 3-ga jagamisel kas jäägi 0 või 1: 1 p
- Mistahes viisil ammendavalt põhjendatud, et abc jagub 3-ga: 4 p

2. *(Toomas Roosma)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Võrdus teisendatud kujule $(x + y)(y + z)(z + x) = 0$: 2 p
- Leitud $x = -y$ või sama võrdus teiste muutujate suhtes: 2 p
- Lahendus korrektselt lõpule viidud: 3 p

Ülesanne osutus oodatust palju raskemaks. Jäädi kinni eeldusesse, et parempoolne murd on võrdne ± 1-ga, või siis et x, y, z on täisarvud.

3. *(Oliver Nisumaa)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et $\angle ABC = \angle ADH$: 1 p
- Näidatud, et $\angle ADH = \angle OHD$: 1 p
- Näidatud, et O on kolmnurga BDH mediaanide lõikepunkt: 2 p
- Näidatud, et kolmnurgad BKO ja DKO on võrdsed: 1 p
- Näidatud, et kolmnurgad HOB ja HOD on võrdsed: 1 p
- Tõestatud, et $\angle OHD = 45^\circ$: 1 p

Õige vastuse eest ilma selgitusteta punkte ei antud.

4. *(Kati Smotrova)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et pikkuse $k+1$ korral leidub Jukul võitev strateegia: 3 p
- Tõestatud, et pikkuse $k+2$ korral leidub Jukul võitev strateegia: 2 p
- Tõestatud, et pikkuse $k+3$ korral leidub Jukul võitev strateegia: 2 p

Idee eest, et paaritu arvu korral tuleks Jukul esimene käik teha keskele, kui seda polnud edasi arendatud, sai 1 punkti.

Kui juhul $k+2$ või $k+3$ oli vaid idee lõigata otsast 2 ruutu ilma täpsustamata, kuidas seda edasi kasutada, siis anti nende osade eest 1 punkt vähem.

5. *(Hannes Jukk)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et võrdsete tipunurkade või võrdsete alusnurkade korral on kolmnurgad sarnased ning tingimused on täidetud: 1 p
- Valitud ühel kolmnurgal alusnurk, mis on võrdne teise kolmnurga tipunurgaga, ning kasutatud õigesti suhet $1 : x$: 1 p
- Koostatud 4 võrrandisüsteemi: 2 p
- Saadud võrrandisüsteemidest leitud kas vajalikud nurgad või suurus x: 2 p
- Saadud võrdkülgsed kolmnurgad, mis on sarnased: 1 p

Eesti 70. matemaatikaolümpiaad

25. märts 2023 Lõppvoor **10. klass**

Hindamisskeemid ja kontrollijate kommentaarid

1. *(Kadi Siigur)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud, et 2-ga jagamisel moodustavad jäägid tsükli pikkusega 3: 2 p
- Leitud, et 5-ga jagamisel moodustavad jäägid tsükli pikkusega 20: 2 p
- Järeldatud, et 10-ga jagamisel moodustavad jäägid tsükli pikkusega 60: 1 p
- Leitud arvu 202320232023 jääk jagamisel arvuga 60: 1 p
- Antud õige vastus: 1 p

2. *(Andres Alumets)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Märgitud, et liidetavaid võib olla rohkem kui 2: 1 p
- Tähele pandud, et liidetavate ruutude summa on kindlasti x-st suurema arvu ruut: 2 p
- Tähele pandud, et ülejäänud liidetavate summa ruut on suurem liidetavate ruutude summast või sellega võrdne: 2 p
- Lahendus korrektselt lõpule viidud: 2 p

Paljud õpilased tõestasid väite ainult juhul, kui liidetavate arv on 2. See on aga lihtsam tõestada kui üldjuht ning need lahendused täispunkte ei saanud.

3. *(Hendrik Vija)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Sõnastatud tõestatav väide ümber kasulikul moel, näiteks avaldades $\angle DFE = \angle DFC - \angle EFC$: 1 p
- Avaldatud otsitavad nurgad kolmnurgas ABC esinevate nurkade kaudu: 3 p
- Jõutud kolmnurgas ABC nurki teisendades lõppvastuseni: 3 p

Ülesanne osutus lahendajaid tugevalt eristavaks. Pea kõikides töödes oli kas jõutud täieliku lahenduseni või ei oldud osatud otsitava nurgaga peaaegu midagi peale hakata. Tõenäoliselt sai paljudele ebaedukatele lahendajatele saatuslikuks halb joonis. Paljudes töödes oli joonis tehtud kas ilma sirkli ja joonlauata, liiga väikeselt või oli ilusat joonist rikutud sellega, et oli tehtud otse selle peale liiga palju märkmeid, näiteks nurkade arvutusi.

Sellest lähtuvalt oleks soovitused lahendajatele edasiseks: tehke geomeetriaülesannete joonised vähemalt poole A4 suurused, kasutades joonestusvahendeid; nurkade arvutused on soovitatav kirjutada välja eraldi tekstina ning joonisele märkida vaid üksikud tähelepanekud, mis päriselt seostuvad tõestatava väitega.

4. *(Birgit Veldi)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Osas a) leitud sobiv konstruktsioon: 3 p
- Osa b) lahendus: 4 p

  Sealhulgas allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti:

  - Värvitud püramiid ja pusletükid malelaua korras: *1 p*
  - Märgatud, et igal pusletükil on musti ja valgeid ruute kas võrdselt või on ühte värvi ruute 3 võrra rohkem kui teist värvi ruute *1 p*
  - Märgatud, et suvalise tükkide paigutuse korral jagub pusletükkide poolt kaetud ala mustade ja valgete ruutude arvude vahe 3-ga, kuid püramiidi mustade ja valgete ruutude arvude vahe ei jagu 3-ga: *1 p*
  - Sellest järeldatud, et 10-astmelist püramiidi pole võimalik kokku panna: *1 p*

Ainult õige vastus, kasutu proovimine ja/või mittetäielik juhtude läbivaatus punkte ei andnud. Sealhulgas ei saanud punkte lahendused, mis proovisid osas b) täita püramiidi 3 rea kaupa.

5. *(Marko Tsengov)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et parameetrist n ei sõltu ühelgi juhul (ei Miku ega Juku võidul) midagi: 1 p
- Tõestatud, et juhul $k \leqslant 2$ võidab alati Miku: 2 p
- Tõestatud, et paaritu $k \geqslant 3$ korral võidab alati Juku: 2 p
- Tõestatud, et paaris $k \geqslant 3$ korral võidab alati Juku: 2 p

Eesti 70. matemaatikaolümpiaad

25. märts 2023 | Lõppvoor | **11. klass**

Hindamisskeemid ja kontrollijate kommentaarid

1. *(Martin Rahe)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Põhjendatud, et algarvu 2 astendaja faktoriaali kanoonilises esituses on vähemalt sama suur kui algarvu 5 oma: 1 p
- Leitud algarvu 5 astendaja arvu 2022! (või 2023!) kanoonilises esituses: 3 p

  Sealhulgas:
  - Saadud aru, et osad tegurid faktoriaalis annavad lõppu rohkem kui ühe nulli: *1 p*
- Põhjendatud, et 2022! ja 2023! liitmisel 5 astendaja ei suurene: 2 p
  - Tegurdatud $2022! + 2023!$ kui $2022! \cdot 2024$: *1 p*
  - Vaadatud 2022! ja 2023! viimaste nullist erinevate numbrite summa jääki 5-ga (või 10-ga) jagamisel: *1 p*
- Saadud õige vastus: 1 p

Kui lahenduses oli tehtud olulistes sammudes arvutus- või algebravigu, mis ei mõjutanud lahenduse käiku, kaotas töö 1 punkti. Kui arvu 5 astendaja leidmiseks kasutati Legendre'i valemit ilma ühegi põhjenduse või viiteta, kaotas töö 1 punkti.

Ülesanne oli üldjoontes hästi lahendatud. Suurimaks komistuskiviks osutus algarvu 5 erinevate astmete õigesti käsitlemine, mitmes töös oli unustatud suuremate astmete mõjuga arvestada ning saadi liiga väike tulemus.

2. *(Märt Põldvere)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et antud võrratustest järeldub võrratus $ab \geqslant \sqrt{2023}$: 2 p
- Näidatud, et peavad kehtima võrdused $a^2 + b^2 = 2ab = 2\sqrt{2023}$: 2 p
- Järeldatud, et peavad kehtima võrdused $a = b = \sqrt[4]{2023}$: 1 p
- Näidatud, et $a = b = \sqrt[4]{2023}$ ei rahulda süsteemi esimest võrratust ning järeldatud, et süsteemil puuduvad positiivsed reaalarvulised lahendid: 2 p

3. *(Sandra Schumann)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et $\angle CBD = \dfrac{\angle CAB}{2}$: 1 p
- Näidatud, et $\angle EBD = 90^\circ$: 1 p
- Tõestatud, et kolmnurga DBD' ümberringjoone keskpunkt on F: 2 p
- Tõestatud, et kolmnurk FBD on võrdhaarne: 1 p
- Näidatud, et $\angle ACB = \angle FDB$: 1 p
- Eeldamata, et punktid E, D' ja B on ühel sirgel, tõestatud, et $\angle DBE = \angle DBD'$: 1 p

Kui lahendus on korrektne, aga kõik järeldused on tehtud vaid ühes suunas ja pole mainitud, et lahendus kehtib ka teises suunas, siis anti lahenduse eest 6 punkti.

Kui lahendus ei saa muid punkte, siis hüpoteesi $|FD| = |FB| = |FD'|$ püstitamise eest anti 1 punkt.

4. *(Ago-Erik Riet)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Kui x on sümbolite arv, siis sobiva tõkke nagu $x(x-1) \geqslant nx(x-1)$ või $\binom{x}{2} \geqslant n\binom{m}{2}$ või $n \leqslant \left\lfloor \dfrac{x}{m} \left\lfloor \dfrac{x-1}{m-1} \right\rfloor \right\rfloor$ (Johnsoni tõkke erijuht) tõestamine: 5 p
- Lahenduse lõpuleviimine: 2 p

Mittetriviaalse optimaalse näite (piisavalt suured m ja n) või näidete pere (nagu näiteks lõplikud projektiivsed tasandid) eest, mis võiks viia edasi lahenduse suunas, anti 1 punkt. Ühes töös oli Johnsoni tõkke tõestamisel tehtud viga, ülesandes nõutud tõestus seetõttu läbi ei läinud, mistõttu see töö sai 3 punkti. Näite eest, kus iga sümbol esineb ülimalt kahel kaardil (esitatav lihtgraafina, mille tipud vastavad kaartidele ja servad vastavad sümbolitele), punkte ei antud, sest huvitavamatel juhtudel (näiteks väikseim lõplik projektiivne tasand Fano tasand) selline lisaeeldus ei kehti.

5. *(Peeter Laud)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et 360° on piisav: 5 p

  Sealhulgas žürii lahendusega 1 sarnaste mõttekäikude puhul:
  - Vaadatud läbi juht, kus väike osuti on sihtasendist mitte kaugemal kui 30°: *1 p*
  - Vaadatud läbi üldjuht, kus aga väikese osuti asend tohib olla kitsendatud kaugemale kui 30° sihtasendist: *4 p*

  Sealhulgas žürii lahendusega 2 sarnaste mõttekäikude puhul:
  - Keeramisviiside loendamine / kirjeldamine: *2 p*

    - Algasendite hulga tükeldamine vastavalt sellele, kuidas sellest asendist alates osuteid keerama peab: *2 p*
    - Keeramisviiside analüüs iga tüki peal: *1 p*
- Näidatud, et 360° on tarvilik: 2 p

  Sealhulgas:
    - Esitatud korrektne näide, kuid analüüsis jäetud läbi vaatamata mõned olulised keeramisviisid (näiteks vaadatakse keeramisi ainult ühele poole): *1 p*

Hindamisskeemid ja kontrollijate kommentaarid

1. *(Valdis Laan)*

Tüüpiliste mõttekäikude eest anti punkte alljärgnevalt.

- Täielik lahendus: 7 p
- Kasulik tähelepanek või tõestus erijuhul: 1 p

2. *(Urve Kangro)*

Žürii lahenduse 1 allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et kõik polünoomi juured peavad olema negatiivsed: 1 p
- Näidatud, et negatiivse a korral $P(a) \geqslant a^{2023} + a^{2021} + \ldots + a + 1$: 2 p
- Leitud saadud geomeetrilise jada summa: 1 p
- Näidatud, et kui $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqslant a < 0$, siis $a^2 - a - 1 \leqslant 0$: 2 p
- Järeldatud, et $P(a) > 0$: 1 p

Žürii lahenduse 2 allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et kõik polünoomi juured peavad olema negatiivsed: 1 p
- Näidatud, et negatiivse a korral $P(a) \geqslant a^{2023} + a^{2021} + \cdots + a + 1$: 2 p
- Matemaatilise induktsiooniga näidatud, et kui $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqslant a < 0$, siis $a^{2n+1} + a^{2n-1} + \ldots + a + 1 > 0$: 4 p

Ainult väite eest, et kuna $P(0) = 1$, siis $a_0 = 1$, punkti ei saanud.

3. *(Janno Veeorg)*

Tüüpiliste mõttekäikude eest anti punkte järgmiselt.

- Täislahendus: 7 p
- Kasulikud tähelepanekud: 1 p

Ülesandele sai läheneda väga mitmel moel ja kõik täislahendused olid erinevad.

4. *(Oleg Košik)*

Eri mõttekäike hinnati kahe eraldi skeemi abil.

Enamuse lahenduste allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Esitatud toimiv algoritm iga naturaalarvu n jaoks, mille korrektsuse tõestus pole keeruline: 4 p
- Tõestatud algoritmi korrektsus (et ei kasutata järjestikusi juveele ega ühte juveeli korduvalt): 3 p

Žürii lahendusega 2 sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et kui juveele saab eemaldada alarmi aktiveerides, siis saab seda ka teha ilma alarmi aktiveerimata: 2 p
- Esitatud korrektne tõestus, et iga n korral saab eemaldada selles koguses juveele: 5 p

Õige vastuse eest ilma selgitusteta punkte ei antud.

5. *(Mart Abel)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud vaid ühe reaalarvu (ükskõik kas c_1 või c_2) olemasolu: 3 p
- Näidatud ka teise reaalarvu olemasolu: 3 p
- Näidatud N sobiv väärtus leitud c_1 või c_2 jaoks: 1 p

Arutluskäikudes esinenud loogiliste vigade või valeväidete eest, mis ei mõjutanud suurel määral lahenduse õigsust võeti maha 1 punkt.